2 ÁLGEBRA

2.1 Los Números Reales

1.2.1 Los números irracionales.

Al obtener algunas medidas de manera más exacta hacemos uso de números que no son enteros, como por ejemplo

4.25, 0.329654, $\sqrt{2}$, π, 0.1001000100001...,

Algunos de estos números se pueden expresar como cocientes de dos enteros y se le llama números racionales.

$$4.25 = \frac{425}{100} \quad ; \; 0.329654 = \frac{329654}{1000000}$$

Pero, hay algunos otros que no tienen esta característica. Así, en 0.1001000100001... observamos que su parte decimal no es finita, pero tampoco es periódica, ya que después de cada 1 hay un 0 más que en el bloque anterior, de manera que no podrá expresarse como cociente de dos enteros, por tanto no es racional. Lo mismo ocurre con $\pi = 3.141592654...$, $\sqrt{2} = 1.441421356...$, y con muchos otros.

Estos números se llaman *números irracionales*, que significa "no son cocientes o razones de enteros"; luego se puede también decir que un número irracional es el que no puede escribirse como razón o cociente de dos enteros.

Por su definición es claro que no hay irracionales que sean racionales, ni racionales que sean irracionales.

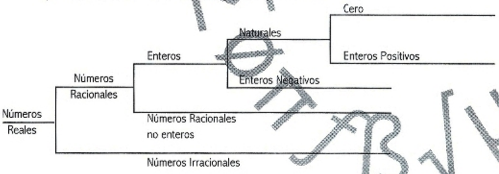
1.2.2 La recta numérica y los números reales.

Los números reales contienen a los números racionales y a los números irracionales. Es decir, bajo el nombre de reales se agrupan los racionales y los irracionales. Igual que los números enteros y racionales se localizan sobre la recta numérica, también podemos localizar a todos los números irracionales. Por ejemplo 0.1001000100001.... se localiza entre 0.1 y 0.2 o para ser más exacto, entre 0.1001 y 0.1002, y de esta forma podemos ir logrando mayor exactitud. Aunque es trabajoso encontrar el punto justo donde se ubica este número, debemos tener la certeza de que al igual que todo número racional puede localizarse sobre la recta, también todo número irracional puede ser localizado sobre la recta. Por tanto todo número real tiene un punto sobre la recta que lo representa.

Cada número real positivo *"a"* puede representarse por un punto *"a"* unidades a la derecha del cero y cada número real negativo *"b"* por un punto *"b"* unidades a la izquierda del cero. ¿Sobrarán puntos después de haber ubicado todos los números reales? La respuesta es no; *hay una relación uno a uno entre cada punto de la recta y cada número real*; es decir, hay exactamente un punto de la recta para cada número real y exactamente un número real para cada punto de la recta.

El número que se asocia a un punto de la recta numérica se llama *coordenada* del punto.

El siguiente diagrama muestra ciertas relaciones entre los números. Siguiendo el diagrama podemos ver lo siguiente: el número cero es un entero, es un racional y es un real, pero no es irracional. El número 3/4 es racional, que no es entero, por lo tanto es real. El número -4 es entero negativo, por tanto no es entero positivo, si es entero, es racional y por supuesto real.



Ejercicio

Indique a que nivel del diagrama se encuentra cada uno de los números de la siguiente lista.

$$2, -5, 0, \frac{3}{4}, \sqrt{3}, \sqrt{5}+1, \frac{-1}{6}, \frac{2}{\sqrt{2}}$$

2.1.3 Adición, sustracción, multiplicación, división y sus propiedades.

Se definen cuatro operaciones básicas entre cada par de números reales: adición, sustracción, multiplicación y división. Sin embargo, podemos limitarnos a dos operaciones: adición y multiplicación, ya que la sustracción y división se definen como suma y producto, respectivamente, como sigue: si tenemos a y b números reales.

La sustracción $a - b$ se define como $a - b = a + (-b)$

La división $a \div b$ se define como $a \div b = a \times \frac{1}{b}$; donde b es diferente de 0.

La expresión $\frac{1}{b}$, se denota por b^{-1}

Note que b debe ser diferente de cero, puesto que como se indicó antes la división por cero no está definida.

Las operaciones adición y multiplicación de números reales, cumplen con las mismas propiedades que se encontraron antes para números racionales. A continuación encuentra un resumen de estas propiedades:

Consideremos tres números reales a, b y c

PROPIEDAD	ADICIÓN	MULTIPLICACIÓN
CONMUTATIVA	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
ASOCIATIVA	$a + (b+c) = (a + b) + c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
IDENTIDAD	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
SIMETRICO	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	———
INVERSO	———	$b \times b^{-1} = b^{-1} \times b = 1$
DISTRIBUTIVA	$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$	

Los números reales satisfacen tambien una propiedad en relación a la multiplicación por cero: El producto de cualquier número real o por cero es cero. En simbolos:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

Ejercicio
Cite el nombre de la propiedad de los números reales que hace verdadera cada una de las siguientes expresiones:

a. $2 + 3 = 3 + 2$

b. $(-6) \times (2 \times (1/3)) = ((-6) \times 2) \times (1/3)$

c. $(\sqrt{2} + 3) + 1 = 1 + (\sqrt{2} + 3)$

d. $5 \times (2 + 0) = 5 \times 2$

e. $8 \times (-6 + \frac{2}{3}) = 8(-6) + 8 \times (\frac{2}{3})$

f. $(7 + 2) \times 1 = 7 + 2$

g. $6 + 2 \times 3 = 6 + 3 \times 2$

2.1.4 La relación de orden.

Si medimos la estatura de Pedro y Juan y obtenemos:
Estatura de Pedro: 1.70 mts.
Estatura de Juan: 1.55 mts.

Decimos que Pedro es más alto que Juan o bien la estatura de Pedro es mayor que la de Juan.
Al medir la temperatura en dos lugares diferentes encontramos:
Temperatura en A: - 1
Temperatura en B: - 4

Sabemos que la temperatura en B es menor que la de A

Como puede notar sobre la recta numérica los números siguen un orden, los de la derecha son siempre mayores que los de la izquierda y los de la izquierda son menores que los de la derecha. Este orden se indica con dos símbolos "<" y ">" llamados *símbolos de desigualdad*.

Se dice que a es menor que b, y se escribe $a < b$, si sobre la recta numérica a está a la izquierda de b, como muestra la figura:

$a < b$

Así la estatura de 1.55 es menor que la de 1.70, se escribe $1.55 < 1.70$ La temperatura de -4 es menor que la de -1, se escribe $-4 < -1$.

Pero también podemos decir que 1.70 es mayor que 1.55 que -1 es mayor que -4. Para indicar que a es mayor que b, se escribe $a > b$. Ahora podemos escribir, $1.70 > 1.55$ y $-1 > -4$.

De tal manera, que si a es menor que b, también podemos decir que b es mayor que a. Es decir, que las expresiones $a < b$ y $b > a$, son equivalentes.

Estas expresiones se usan también para indicar cuando un número es positivo o negativo. Cualquier número positivo a, se encuentra a la derecha del cero, sobre la recta numérica, luego cumple la desigualdad $a > 0$. De la misma forma un número negativo a cumple la desigualdad $a < 0$.

Para dos números reales cualesquiera, a y b, pueden darse tres relaciones, solamente una de las cuales será válida. Estas son:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b$$

Por ejemplo, si deseamos encontrar en un grupo de clase a todos los alumnos que miden 1.70 metros, cada vez que medimos a uno de ellos podemos encontrar lo siguiente: mide mas de 1.70 (estatura mayor a 1.70), mide menos de 1.70 (estatura menor a 1.70) o mide 1.70 (estatura igual a 1.70)

Otros símbolos usados para indicar orden

Consideremos los siguientes casos:

1. En un anuncio de periódico, solicitando un trabajador, dice que se necesita a una persona no menor de 25 años, entendemos que pueden aspirar al trabajo las pesonas mayores de 25 años y las que tengan exactamente 25; es decir que pueden optar todos aquellos con edad mayor o igual a 25 años. Si a es la edad , podemos escribir $a \geq 25$.

2. En la carretera encontramos señales que dicen "velocidad máxima 70 kms/hora". Usted estará dentro del límite indicado, si conduce a una velocidad menor o igual a 70 kms/hora. Si v es la velocidad en kms/hora, esto se escribe $v \leq 70$kms/hora.

Estos ejemplos muestran la necesidad de otros dos símbolos que indican orden $\geq$ y $\leq$.

$a \geq b$ se lee "a es mayor o igual que b"
$a \leq b$ se lee "a es menor o igual que b"

2.1.5 Valor Absoluto.

Sobre la recta numérica podemos medir distancias al cero. por ejemplo 5 dista 5 unidades del cero y -8 dista 8 unidades del cero. La distancia de un número x al cero, se denota encerrando el número entre barras, $|x|$, y se lee valor absoluto de x. Así la distancia de 5 al cero se escribe $|5|$, cuyo valor es 5; la distancia de -8 al cero se escribe $|-8|$ y su valor es 8. por tanto podemos escribir:

$$|5| = 5 \qquad \text{y} \qquad |-8| = 8$$

Observe que al aplicarle el valor absoluto a un número, el resultado es siempre no negativo, como es de esperar, pues se trata de una distancia. Esto permite deducir que si un número x es no negativo, $x \geq 0$, entonces su valor absoluto es el mismo número x. En símbolos, si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$. Si un número x es negativo, $x \leq 0$, entonces su valor absoluto es $-x$, que es positivo. En símbolos, si $x \leq 0$, entonces $|x| = -x$

El valor absoluto se usa también, de manera más general, para indicar cualquier distancia entre dos puntos. Por ejemplo la distancia entre 5 y 12 se escribe $|12 - 5| = |7| = 7$, pero esta distancia es igual si se mide de 12 a 5, por lo que $|5 - 12| = |-7| = 7$.

2.1.6 Intervalos en la recta numérica; distintas formas de representación.

Para indicar a todos los números reales comprendidos en un segmento de la recta numérica se usan los *intervalos*. Por ejemplo las edades de las personas que asisten como estudiantes a la Universidad oscilan entre 15 y 55 años, es un intervalo de edades. El punto inicial, 15, y el punto final, 55, se llaman *extremos*.

edades

2.1.6.1. Intervalos Acotados

Un intervalo se dice acotado cuando los extremos son conocidos. Según si los extremos están incluidos o no, encontramos 4 tipos de intervalos: *abiertos*, cuando no incluye los extremos; *cerrados*, cuando si los incluye; semiabiertos por la derecha o semicerrados por la izquierda, cuando solo se incluye el extremo de la izquierda, y semiabiertos por la izquierda o semicerrados por la derecha, cuando solo se incluye el extremo de la derecha.

Los intervalos tienen su propia forma de escribirse y su representación gráfica sobre la recta numérica. En ambos casos el paréntesis se usa para indicar que el extremo no se incluye y los corchetes (paréntesis cuadrados) para indicar que está incluido el extremo.

A continuación se muestran los cuatro tipos de intervalos y su representación gráfica.

Sean a y b números reales, tales que $a < b$

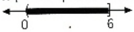
INTERVALO	NOTACION	¿QUE INCLUYE?	GRAFICA
Abierto	(a,b)	Todos los números reales entre a y b	
Cerrado	$[a,b]$	Todos los números reales entre a y b, incluidos a y b	
Semiabierto por la izquierda	$(a,b]$	Todos los números reales entre a y b, incluido b	
Semiabierto por la derecha	$[a,b)$	Todos los números reales entre a y b, incluido b	

Ejemplos

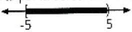
1. $(-2,7)$ intervalo abierto 

2. $[3,9]$ intervalo cerrado 

3. $(0,6]$ intervalo semiabierto por la izquierda o semicerrado por la derecha.



4. $[-5,5)$ intervalo semiabierto por la derecha o semicerrado por la izquierda.



2.1.6.2. Intervalos no acotados.

Se sabe que a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta numérica, pero la recta numérica se extiende indefinidamente a derecha e izquierda, por lo que es imposible decir cual es el primero y el último punto de la recta. Lo mismo ocurre con los números reales, a pesar de su orden, no hay un primero, ni un último. Se conviene en usar dos símbolos que indican esta ausencia de principio a fin, estos son $+\infty$, que indica que la recta continúa a la derecha y que se lee "más infinito" y $-\infty$ que indica que continúa hacia la izquierda y se lee "menos infinito".

Estos símbolos, son útiles en matemática para presentar la idea de que no hay frontera, no hay fin, pero no hay que olvidar que son sólo símbolos, no representan cantidades numéricas, por tanto no pueden operarse como los números.

Una de las utilidades de estos símbolos es en intervalos, en los que no hay extremo superior ni inferior. Por ejemplo, para representar a todos los números, reales mayores que -9, o a todos los números reales menores que 2. Estos intervalos se llaman *no acotados*.

A continuación se muestran los casos típicos de intervalos no acotados. Note que en los extremos donde aparece el signo $+\infty$ ó $-\infty$, siempre se deja abierto puesto que no hay último o primer término.

NOTACION	¿QUE INCLUYE?	GRAFICA
$(a, +\infty)$	Todos los números reales mayores que a	
$[a, +\infty)$	Todos los números reales mayores o iguales que a	
$(-\infty, a)$	Todos los números reales menores que a	
$(-\infty, a]$	Todos los números reales menores o iguales que a	

Ejemplos

1. El intervalo $(-9, +\infty)$ se representa graficamente 

2. El intervalo $(-\infty, 2]$ se representa graficamente 

EJERCICIOS

1) Establezca si cada enunciado es cierto o falso. Justifique

1. -1 es un número entero ____
2. $\sqrt{7}$ es un número real ____
3. 0 es un número racional ____
4. -19 1/5 es un número irracional ____
5. $\sqrt{7}$ es un número racional ____
6. -0.06 es un número real ____
7. 0.5 es un entero ____
8. 0 es un entero ____
10. -4 es un entero negativo ____
11. Todo entero es un número racional ____
12. Todo entero es un número irracional ____
13. Todo número racional es un número real ____

2) Indique en la siguiente tabla, con una cruz bajo la columna, si el número de la izquierda recibe el nombre que se indica en el encabezado de la tabla.

Natural	Entero	Entero negativo	Racional	Racional no entero	Irracional	Real
-3						
0						
2/3						
1						
$\sqrt{5}$						
$-\sqrt{7}$						
-1.67						
9 1/2						
- 200						
6.23						
$-\sqrt{9}$						

3) Diga cual es la propiedad que se muestra.

1. $3\,(4 + 2) = 3\,(4) + 3\,(2)$ ____________
2. $5 \times 4 = 4 \times 5$ ____________
3. $3 + 4 = 4 + 3$ ____________
4. $1\,(8 + 3) = (8 + 3)$ ____________
5. $8\,(4 \times 7) = (8 \times 4)\,7$ ____________
6. $3 + (4+8) = (3 + 4) + 8$ ____________

4) Obtenga el resultado con la propiedad indicada.

1. 3 (8 + 4) =	Commutatividad de la multiplicación
2. (3 + 8) + 4 =	Asociatividad de la adición
3. 3 (8 + 4) =	Commutatividad de la adición
4. (3 x 8) 4 =	Asociatividad de la multiplicación
5. 3 (8 + 4) =	Distributividad
6. 7 x 1 =	Identidad de la multiplicación
7. 3 + (-3) =	Simétrico aditivo
8. 4 + 0 =	Identidad para la adición
9. 4 x 1/4 =	Inverso multiplicativo

5) Inserte > ó <, para formar un enunciado verdadero

1. 2	___	3	**2.** 4	___	-2
3. 3/5	___	4/5	**4.** -4.09	___	-5.3
5. - 0.006	___	-0.007	**6.** 5/3	___	3/5
7. -3	___	0	**8.** -7/8	___	-8/9
9. -780	___	-655	**10.** -3.55	___	-3.56

6) Liste los números de menor a mayor

1. 6, 2, -1, 3, -5

2. 1/3, -1/2, -2, 3/5, -3/4

3. -2.1, -2, -2.4, |-2.8|, -|2.9|

7) Utilice el valor absoluto para calcular la distancia entre cada par de números

1. 4 y -2 **2.** 7 y 7.8

3. -5.1 y -4.3 **4.** 3/4 y 0.6

5. 2 y -2 **6.** 2 y 2

8) Represente gráficamente los siguientes intervalos

1. [-1, 3] **2.** (0, 5)

3. (3, + ∞) **4.** (- ∞, -1]

5. (-2, 5] **6.** (- ∞, -3)

7. [4, 8) **8.** (0, + ∞)

2.2 Exponentes y Radicales

2.2.1 Exponentes enteros.

Cuando encontramos un producto donde el mismo factor se repite varias veces, como por ejemplo:

$$\underbrace{a.a.a...a}_{n\ veces}$$

Esto se escribe en forma abreviada como a^n que se lee "a elevado a la n" ó "n-ésima potencia de a" ó "a a la n-ésima potencia".

El factor a es la base y n se llama *exponente*

Ejemplos

1. $3^2 = 3 \times 3$ se lee 3 elevado al exponente 2; 3 es la base y 2 el exponente

2. $(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5)$ se lee -5 elevado al exponente 4; la base es -5 y el exponente 4

3. $2^1 = 2$ se lee 2 elevado al exponente 1; la base es 2 y el exponente es 1

4. $x^3 = x\ .\ x\ .\ x$ se lee x elevado al exponente 3; la base es x y el exponente 3

Para los exponentes 2 y 3 se acostumbra leerlos como:

a^2 ...."a al cuadrado"

a^3 ...."a al cubo"

Si bien hemos definido las potencias para exponentes naturales diferentes de cero, es posible hacerlo cuando $n = 0$

$a^0 = 1$, para cualquier número real diferente de cero

Es decir, la potencia cero de cualquier número real diferente de cero es 1.

También podemos extender las potencias a exponentes negativos con la siguiente definición

$a^{-n} = 1/a^n$, si a es un número real diferente de cero.

Con esta definición queda establecido el significado de a^n para cualquier número entero n y a un número real diferente de cero.

Ejemplos

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$

2. $(-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = -\frac{1}{3}$

3. $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Considere las siguientes expresiones

$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{(-4)(-4)} = \frac{1}{16}$ y

$-4^{-2} = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$ note que $(-4)^{-2}$ no es igual a -4^{-2}

De igual forma:

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$
$$-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$$

lo anterior sugiere que debemos ser muy cuidadosos con el uso de paréntesis, ya que se obtienen resultados diferentes.

2.2.2 Leyes de los exponentes.

Hay una serie de reglas o propiedades que cumplen los exponentes. Estas se conocen como *leyes de exponentes* y es sencillo verificarlas usando las definiciones anteriores.

Sean a y b números reales; m y n números enteros

1. **El producto de dos potencias con la misma base**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esto ocurre puesto que $a^m = a.a.....a$ m veces y $a^n = a.a.....a$, n veces, luego

$$a^m.a^n = \underbrace{(a.a.....a)}_{m\ veces}\underbrace{(a.a.....a)}_{n\ veces} = \underbrace{a.a.....a}_{m+n\ veces}$$

Ejemplos

1) $3^4 . 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$
2) $2^{-1} . 2^5 = 2^{-1+5} = 2^4$
3) $z^3 . z^{-2} = z^{3-2} = z^1 = z$

2. La potencia de una potencia.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Lo anterior resulta de que $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{\text{n veces}}$ pero cada a^m es $\underbrace{a.a \ldots a}_{\text{m veces}}$

por tanto, en $(a^m)^n$ hay m veces n factores iguales a a

Ejemplos

1) $(5^3)^{-2} = 5^{3(-2)} = 5^{-6}$
2) $((-2)^3)^5 = (-2)^{3(5)} = (-2)^{15}$
3) $(y^{-2})^{-4} = y^{-2(-4)} = y^8$

3. La potencia de un producto.

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

NOTA: La comprobación de este resultado y los siguientes se dejan como ejercicios al lector.

Ejemplos

1) $(5 \text{ X } 4)^2 = 5^2.4^2$
2) $\left[\frac{1}{2} \text{ X } \frac{5}{3}\right]^{-3} = \left[\frac{1}{2}\right]^{-3} \left[\frac{5}{3}\right]^{-3}$
3) $(xy)^5 = x^5 y^5$

4. El cociente de dos potencias con la misma base.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ si } a \text{ no es cero.}$$

Ejemplos

1) $\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$
2) $\frac{4^3}{4^5} = 4^{3-5} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2}$
3) $\frac{w^3}{w} = \frac{w^3}{w^1} = w^{3-1} = w^2$

5. **La potencia de un cociente**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$, si b no es cero

Ejemplos

1) $\left[\frac{3}{4}\right]^5 = \frac{3^5}{4^5}$

2) $\left[-\frac{2}{5}\right]^3 = \left[\frac{-2}{5}\right]^3 = \frac{(-2)^3}{5^3}$, note que el signo menos de la fracción se le dejó al numerador, también puede dejarse en el denominador y se tendría el siguiente resultado equivalente.

$$\left[\frac{-2}{5}\right]^3 = \left[\frac{2}{-5}\right]^3 = \frac{(2)^3}{(-5)^3}$$

3) $\left[\frac{u}{v}\right]^{-2} = \frac{u^{-2}}{v^{-2}} = \frac{\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{v^2}} = \frac{1}{u^2} \div \frac{1}{v^2} = \frac{v^2}{u^2}$

Estas leyes se usan para simplificar expresiones en las que aparecen varios exponentes.

Ejemplos
Simplificar la expresión dada.

1) $\frac{2^3(-3)^2 4^0}{2^4(-3)^1}$

$\frac{2^3(-3)^2 4^0}{2^4(-3)^1} = \frac{2^3}{2^4}\,\frac{(-3)^2}{(-3)^1}\,4^0$ separando en fracciones las potencias de igual base

$= 2^{3-4}.(-3)^{2-1}.4^0$ cociente de dos potencias con la misma base.

$= 2^{-1}.(-3)^1 .1$

$= \frac{-3}{2}$

1) $\dfrac{5^4\,6^{-5}\,2^2}{5^3\,6^{-3}\,2}$

$$\frac{5^4\,6^{-5}\,2^2}{5^3\,6^{-3}\,2} = \frac{5^4}{5^3}\cdot\frac{6^{-5}}{6^{-3}}\cdot\frac{2^2}{2}$$

$$= 5^{4-3}\,.\,6^{-5+3}\,.\,2^{2-1}$$

$$= 5^1\,.\,6^{-2}\,.\,2^1$$

$$= \frac{5\,.\,2}{6^2}$$

$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

2) $\dfrac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3}$

$$\frac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3} = 2^2\,.\,3^{-1}\,.\,x^{2+3}y^{-4-3}$$

$$= 4\,.\,3^{-1}\,.\,x^5y^{-7}$$

$$= \frac{4x^5}{3y^7}$$

Al simplificar, se acostumbra dejar todos los exponentes positivos (ni negativos, ni cero)

2.2.3 Exponentes fraccionarios y radicales.

Cuando buscamos un número a que elevado al cuadrado dé 100, es decir $a^2 = 100$, estamos buscando la raíz cuadrada de 100.

Si buscamos un número b que elevado al cubo dé 8, es decir $b^3 = 8$, estamos buscando la raíz cúbica de 8.

En general, si $b^n = a$ decimos que b es la raíz n-ésima de a y se escribe

$$b = \sqrt[n]{a}$$

donde n es un natural mayor o igual a 2.

La expresión $\sqrt[n]{a}$ se llama *radical*.

$\sqrt{\ }$	se llama signo de radical
n	indice de radical
a	cantidad subradical o radicando

Así, si a y b son números reales y n un natural mayor o igual a 2, se dice que la raiz n-ésima de a es b si $b^n = a$. De igual forma si $b^n = a$, entonces b se llama la raiz n-ésima de a.

Es decir,
La expresión $\sqrt[n]{a} = b$ es equivalente a $b^n = a$.

Cuando $n = 2$ no se acostumbra escribir el índice y se llama *raíz cuadrada* Esto $\sqrt[2]{a}$ es $\sqrt{a}$

Observe que si $n = 2$, la cantidad subradical debe ser no negativa, ya que si a fuera negativa , debería existir un número real c tal que c^2 sea negativo, y ese número real no existe.

Por ejemplo $\sqrt{-25}$, denota un número c tal $c^2 = -25$, pero todo número real elevado al cuadrado es no negativo, luego no puede ser igual a -25 que es negativo.

Por otra parte $\sqrt{25}$ siempre denota la *raíz positiva o principal*, es decir $\sqrt{25} = 5$ ya que $5^2 = 25$. Aunque también $(-5)^2 = 25$, se usa $-\sqrt{25}$ para denotar la raíz
negativa.

Esto se generaliza para las raíces de índice par.
Si n es par y a positivo $(a > 0)$, $\sqrt[n]{a}$ es un número positivo b tal que $b^n = a$ y se llama *raíz principal o positiva.*

Por lo anterior $-\sqrt[n]{a}$ es un número negativo b que se llama *raíz negativa.*

Cuando n es impar, la cantidad subradical puede tomar valores positivos o negativos y para cada número real a hay exactamente una raíz n-ésima real de a.

Ejemplos

1) $\sqrt[3]{64} = 4$ ya que $4^3 = 64$

2) $\sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = -8$

3) $\sqrt[5]{-243x^{10}} = -3x^2$

Cuando la cantidad subradical es 0, no importa cuál sea el índice de la raíz, el resultado es siempre 0. Es decir, para cualquier número n, natural mayor o igual a 2.

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

Los radicales pueden expresarse también con exponentes fraccionarios, de la siguiente manera:

Si a es un número real, m un entero y
n un natural mayor o igual a 2, definimos

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ y } a^{\frac{m}{n}} = \left[a^{\frac{1}{n}}\right]^m$$

teniendo cuidado que cada una de las raíces queden bien definidas.

Así la expresión $81^{3/4}$ se puede escribir $(81^{1/4})^3$ ó $(81^3)^{1/4}$

Los exponentes racionales facilitan muchos cálculos, especialmente cuando se usan las leyes de exponentes racionales o leyes de los radicales que son una extensión de las leyes de exponentes enteros.

2.2.4 Leyes de los radicales.

Sean m y n números enteros positivos, n mayor o igual a 2, a y b números reales, tales que $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ sean números reales, se tienen las siguientes reglas:

1. **Elevar una raíz, a una potencia igual al índice de la raíz.**

$$\left[\sqrt[n]{a}\right]^n = \left[a^{\frac{1}{n}}\right]^n = a$$

Ejemplos

1) $(\sqrt{5})^2 = 5$

2) $(\sqrt[5]{-3})^5 = -3$

3) $[(3x)^{\frac{1}{3}}]^3 = 3x$

2. **Extraer raíz a una potencia igual al índice de la raíz.**

$$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} a, \text{ si } n \text{ es impar} \\ |a|, \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejemplos

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = |2| = 2$, pero también $16 = (-2)^4$, luego
$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$.

NOTA: No olvide que $\sqrt{a^2} = |a|$

Ejemplo

$\sqrt{16x^2} = (16x^2)^{\frac{1}{2}} = [(4x)^2]^{\frac{1}{2}} = |4x|$ Siendo x una variable no se conoce si su valor es positivo o negativo, por tanto deben conservarse las barras de valor absoluto.

3. Producto de dos raíces con el mismo índice.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplo
Las leyes de los exponentes son de mucha utilidad en la simplificación de expresiones, como la que se presenta a continuación donde se han usado propiedades de exponentes y de los números reales, para simplificar la expresión.

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{108} \cdot \sqrt[5]{(-72)} &= \sqrt[5]{(108)(-72)} = (3^3 .2^2)\ ((-1))3^2\ 2^3))^{\frac{1}{5}} \\
&= ((-1)\ (3^5)\ (2^5))^{\frac{1}{5}} \\
&= ((-1)^5)^{\frac{1}{5}}\ (3^5)^{\frac{1}{5}}\ (2^5)^{\frac{1}{5}} \\
&= (-3)\ (2) \\
&= -6
\end{aligned}$$

De la misma forma

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^3y} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{(x^3y)(xy)} &= \sqrt{(x^3x)\ (y \cdot y)} \\
&= \sqrt{x^4y^2} = \sqrt{x^4}\ \sqrt{y^2} \\
&= (x^4)^{\frac{1}{2}}\ (y^2)^{\frac{1}{2}} = ((x^2)^2)^{\frac{1}{2}}\ |y| \\
&= |x^2|\ |y| = x^2\ |y|
\end{aligned}$$

ya que $x^2 \geq 0$, entonces $|x^2| = x^2$

4. Cociente de dos raíces con el mismo índice.

Si b es un número real diferente de cero.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{ó bien} \quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left[\frac{a}{b}\right]^{\frac{1}{n}}$$

Ejemplo

$$\frac{3^{\frac{1}{3}}}{(-7)^{\frac{1}{3}}} = \left[\frac{3}{-7}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{w^{\frac{1}{4}}}{z^{\frac{1}{4}}} = \left[\frac{w}{z}\right]^{\frac{1}{4}}$$

5. Raíz de otra raíz.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \text{o bien} \quad \left[a^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

Ejemplo

$$\left[64^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{6}}$$

$$\left[(xy)^{\frac{1}{5}}\right]^{\frac{1}{3}} = (xy)^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = (xy)^{\frac{1}{15}}$$

2.2.4.1. Jerarquía de los exponentes en presencia de otras operaciones.

Con los exponentes enteros y racionales se agregan dos operaciones a la adición, sustracción, multiplicación y división de números reales, por lo que es necesario revisar la jerarquía de las operaciones. De la jerarquía que se establece para las cuatro operaciones básicas, salvo por el uso de signos de agrupación, se sabe que primero se realizan multiplicación y división y luego adicción y sustracción. Si además aparecen operaciones de potenciación y radicación, estas deben realizarse antes que cualquiera de las otras cuatro operaciones. Es decir estas tienen mayor jerarquía.

Ejemplos

1) Al operar la expresión $6 \div 2 + 3 \times 2^2 - 3^2$
primero se realizan las potencias, y se tiene luego los productos y cocientes para terminar con sumas y restas

$$\begin{aligned} 6 \div 2 + 3\times 2^2 - 3^2 &= 6 \div 2 + 3 \times 4 - 9 \\ &= 3 + 12 - 9 \\ &= 6 \end{aligned}$$

2) La expresión $(3 \times 5^2 + 4)7$
Primero se realizan las operaciones dentro del paréntesis. En este caso hay una suma, un producto y una potencia, empezamos con la potencia y se tiene
$(3 \times 5^2 + 4)7 = (3(25) + 4)7$
continuamos dentro del paréntesis con el producto

$$\begin{aligned} (3 \times 5^2 + 4)7 &= (3(25) + 4)7 \\ &= (75 + 4)7 \end{aligned}$$

siempre dentro del paréntesis se realizan la suma y luego el producto fuera del paréntesis, de la siguiente forma
$(3 \times 5^2 + 4)7 = (79)7 = 553$

3) Para la siguiente expresión
$(6^2 - 2) \div (\sqrt{36} - 4)$,
también se debe empezar por las operaciones dentro del paréntesis y de estas elegimos las potencias y las raíces
$(6^2 - 2) \div (\sqrt{36} - 4) = (36 - 2) \div (6 - 4)$
Dentro de los paréntesis quedaron sumas (restas) que se harán antes que la división porque estan entre signos de agrupación
$(6^2 - 2) \div (\sqrt{36} - 4) = (34) \div (2)$
para terminar con la división
$(6^2 - 2) \div (\sqrt{36} - 4) = 17$

2.2.5 Potencias de diez y notación científica.

En la sección de numeración se estudió cómo en un número cada dígito tiene un valor, de acuerdo la posición en que se encuentra y que estas posiciones reciben los siguientes nombres de derecha a izquierda:
Unidades, decenas, centenas, unidades de miles, decenas de miles, centenas de miles, unidades de millones, etc. Ahora que se conoce la función de los exponentes, se puede pensar en escribir cada una de estas posiciones como una potencia de diez.

Unidades.......... 10^0
Decenas........... 10^1
Centenas.......... 10^2
Unidades de miles.......... 10^3

De la misma forma se hace con la parte decimal de un número. La posición inmediatamente a la derecha del punto se llama décima, las siguientes centésima, milésima, diez milésima, etc. Cada posición indica una potencia negativa de 10.

Décima.............	$\frac{1}{10}$	$= 10^{-1}$
Centésima.........	$\frac{1}{100}$	$= 10^{-2}$
Milésima...........	$\frac{1}{1000}$	$= 10^{-3}$
Diéz milésima...	$\frac{1}{10000}$	$= 10^{-4}$

De ahí que nuestra forma de numeración se llama decimal, a diferencia de otras como la maya que es vigesimal, de base 20.

Estas potencias de 10 han sido aprovechadas para escribir números muy grandes o muy pequeños con la llamada ***notación científica***. Por ejemplo, la distancia de la Tierra al Sol es de 150000 millones de metros, es decir, el número 15 seguido de 10 ceros, lo cual puede escribirse como el producto 15×10^{10}, ó también, 1.5×10^{11}. Esta última forma de escritura se llama ***notación científica***, y consiste en escribir el número como producto de un número mayor o igual que 1 y menor que 10 y una potencia de 10.

Decíamos que esta notación, tambien es útil para escribir números muy pequeños. Así el diámetro de un átomo es 0.0000000001 metros que se escribe en notación científica 1×10^{-10}.

Para escribir un número en notación científica, mueva el punto decimal hasta obtener un número mayor o igual que 1 y menor que 10, es decir a la derecha del primer dígito diferente de cero. Si movió el punto n espacios hacia la izquierda multiplique el número anterior por la n-ésima portencia de 10. Si el punto se movió hacia la derecha la potencia es negativa.

Ejemplo

Escribir en notación científica

1) **1256.856**

Movemos el punto decimal a la izquierda 3 posiciones (dejando una cifra entera). En este caso 1.256856. El punto se movió 3 unidades a la izquierda por tanto multiplicamos por 10^3 y tenemos

$$1.256856 \times 10^3$$

2) **0.002587**

Movemos el punto decimal a la derecha 3 posiciones (dejando una cifra entera). Y tenemos 2.587. Como se movió 3 unidades a la derecha, debemos multiplicar por 10^{-3} y tenemos

$$2.587 \times 10^{-3}$$

3) **12**

12 es un número entero y aunque el punto decimal no se escribe se entiende que es igual a 12.0, luego el punto se correrá una unidad hacia la izquierda y por tanto debemos multiplicar por 10^1. Así

$$12 = 1.2 \times 10^1 = 1.2 \times 10$$

El exponente 1, usualmente, no se escribe

Si el número aparece en notación científica y se desea escribirlo en forma decimal, se debe mover el punto tantas veces como indique la potencia de 10 y agregar ceros cuando sea necesario. El movimiento del punto será hacia la derecha si el exponente es positivo y a la izquierda si este es negativo. Si el exponente es cero basta con quitar la potencia 10^0.

Ejemplo

1) **2.347×10^4**

Movemos el punto decimal cuatro lugares a la derecha, para obtener 23470. Este último no es necesario escribirlo, luego

$$2.347 \times 10^4 = 23470$$

2) **1.9×10^{-10}**

Movemos el punto 10 lugares a la izquierda

$$1.9 \times 10^{-10} = 0.00000000019$$

3) **8.35×10^0**

Ya que se trata de una potencia 0 escribimos

$$8.35 \times 10^0 = 8.35$$

Las reglas de los exponentes permiten operar algunas cantidades escritas en notación científica

Ejemplos

Opere y dé el resultado en notación científica

1) $$\frac{6.335 \times 10^6}{1.81 \times 10^2}$$

Ya que nuestros números están escritos en notación científica separamos las potencias de 10

$$\frac{6.335}{1.81} \times \frac{10^6}{10^2},$$

Se realiza la operación $\frac{6.335}{1.81} = 3.5$

y se simplifican las potencias de 10: $\frac{10^6}{10^2} = 10^4$

por tanto $\frac{6.335 \times 10^6}{1.81 \times 10^2} = 3.5 \times 10^4$

2) **(0.00102)(0.03)**

Los factores se encuentran en forma decimal, comenzamos por escribirlos en notación científica

$$(0.00102)(0.03) = (1.02 \times 10^{-3})(3 \times 10^{-2})$$

Agrupamos las dos cantidades y las potencias de 10

$$(1.02 \times 3)(10^{-3} \times 10^{-2})$$

Para obtener

$$3.06 \times 10^{-5}$$

EJERCICIOS

1) Escriba las siguientes expresiones empleando exponentes

1. 3.3	**2.** 2.2.2.2.2	**3.** (-5)(-5)(-5)
4. 2.2.3.3.3	**5.** -3.3.3	**6.** -2.2.3.3
7. 3.3.3 + 3.3	**8.** 5.5 - 5.5.5	**9.** x.x.x.x.x
10. -y.y.y.y	**11.** x.x.y.y.y.y.y	**12.** (-x)(-x)(-x)+z.z.z.z.z

2) Utilice leyes de exponentes para efectuar las operaciones y simplificar

1. $2^2 \cdot 2^3$	**2.** $-2^2 \cdot 2^5$	**3.** $(3^3)^2$
4. $(-2^3)^3$	**5.** $(2^2)^3$	**6.** $(-3^2)^2$
7. $\dfrac{9^8}{9^4}$	**8.** $\dfrac{(-2)^6}{(-2)^{10}}$	**9.** 2^{-4}
10. 3^{-3}	**11.** $\dfrac{(-7)^4}{(-7)^6}$	**12.** $\dfrac{2^6 \cdot 2^7}{2^{10}}$
13. $\dfrac{10^{23} \cdot 10^{-11}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}}$	**14.** $\dfrac{10^{-13} \cdot 10^{-4}}{10^{-21} \cdot 10^{3}}$	**15.** -8^0
16. $(-8)^0$		

3) Escriba en forma decimal

1. 1.47×10^6	**2.** 9×10^{-3}
3. 2.11×10^{-5}	**4.** 2.13×10^{-5}
5. 1.63×10^{-4}	**6.** 5.35×10^2
7. 6.15×10^5	**8.** 1×10^4

4) Escriba en notación científica

1. 329	**2.** 0.08	**3.** 85000
4. 0.0000101	**5.** 99000000	**6.** 0.0079
7. -0.00021	**8.** 0.0317×10^{-2}	**9.** 765×10^{-5}
10. 0.0012×10^{-2}		

5) Realice la operación indicada y exprese cada número sin exponentes

1. $(4 \times 10^2)(3 \times 10^5)$	**2.** $(2 \times 10^{-3})(3 \times 10^2)$
3. $(1.6 \times 10^{-2})(4 \times 10^{-3})$	**4.** $\dfrac{6.4 \times 10^5}{2 \times 10^3}$
5. $\dfrac{8 \times 10^{-3}}{2 \times 10}$	**6.** $\dfrac{8.4 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-3}}$
7. $\dfrac{1.6 \times 10^3}{8 \times 10^{-3}}$	

6) Convierta cada factor a notación científica, simplifique y exprese el resultado con la misma notación

1) $\dfrac{(90000)(0.000002)}{0.006}$ **2)** $\dfrac{(0.0006)(4000)}{0.00012}$

3) $\dfrac{(600000)(0.000003)}{(0.0004)(1500000)}$ **4)** $(230000)(3000)$

5) $(0.0006)(5000000)$ **6)** $(0.003)(0.00015)$

7) Encuentre cada una de las siguientes raíces

1) $(-3^2)^{3/5}$ **2)** $-9^{1/2}$ **3)** $\left[\dfrac{4}{27}\right]^{\frac{3}{2}}$

4) $5^{3/2}.5^{1/2}$ **5)** $((3)^2)^{1/2}$ **6)** $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}}$

7) $\left[\dfrac{1}{16}\right]^{\frac{5}{4}}$ **8)** $(3^2)^{-2/5}$ **9)** $\sqrt{0.04}$

10) $(0.09)^{-1/2}$

8) Encuentre cada una de las siguientes raíces

1) $\sqrt{27^{-2/3}}+5^{2/3}.5^{1/3}$ **2)** $4(1/2)^0+2^{-1}-16^{-1/2}.4.3^0$

3) $8^{-2/3}+3^{-2}-\dfrac{1}{9}(10)^0$ **4)** $64^{-2/3}.16^{5/4}.2^0(\sqrt{3})^4$

5) $8^{2/3}.16^{-3/4}.2^0-8^{2/3}$ **6)** $\dfrac{3^{-2}+5(2)^0}{3-4(3)^{-1}}$

7) $(0.125)^{-2/3}+\dfrac{3}{2+2^{-1}}$ **8)** $25^{1/2}+0.25^{1/2}-8^{1/3}.4^{-1/2}+0.027^{1/3}$

2.2 Exponentes y Radicales

Una expresión algebraica es el resultado que se obtiene de aplicar a una colección de letras y números reales, un número finito de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones o cálculos de raíces.

Algunas podrían ser:

$6y^5$, $8x^2 - 64y$, $x^2 + 3x + 26$, $\frac{3x + 5}{x^2 - 4}$

A menudo se encuentran en las expresiones, letras como x, y, z, w, etc., las cuales reciben el nombre de variables y a los números que las multiplican se les da el nombre de *coeficientes.*

2.3.1 Témino Algebraico.

Término algebraico es una expresión de la forma ax^n, en donde a se conoce como el coeficiente de x y n como el exponente de x.

Dependiendo del número de términos, una expresión algebraica puede ser un *monomio,* si tiene un término, *binomio* si tiene dos, *trinomio* si tiene tres, y en general se llama *multinomio* si tiene más de dos términos.

Ejemplos:
En $x^2 + 3x + 26$ se tienen tres términos y una sola variable, la cual es x, o sea que es un trinomio de una sola variable.

En $6y^5$, se tiene una expresión de un solo término, en donde el coeficiente es 6 y la variable y, asi que se trata de un monomio de una sola variable.

En la expresión: $8x^2 - 64y$; 8 y 64 son los coeficientes, x e y son las variables. Esta expresión tiene dos términos, de manera que aquí se tiene un binomio de dos variables.

El *grado de un monomio* es la suma de los exponentes de sus variables.

Ejemplos:

$3x^4$ por su exponente tiene grado 4
$4x^2z^3$ por sus exponentes tiene grado 5

Un polinomio de grado n, en la variable x es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

En donde a_n, a_{n-1}, ... a_0, son números reales, $a_n \neq 0$ y n es un entero positivo.

Para obtener el grado de un polinomio en varias variables, se calcula, el grado de cada término y el mayor de éstos será el grado del polinomio.

Ejemplo:
El polinomio $4x^3z^5 - 25z^3y^4$ es de grado 8, ya que el grado del primer término es 8, mientras que el segundo término es de grado 7.

2.3.2 Simplificación de Términos semejantes.

Los términos semejantes son dos o mas términos que difieren únicamente en sus coeficientes. O sea que son términos que contienen las mismas variables elevadas a los mismos exponentes.

Ejemplos:

1) $3x^2y$ y $5x^2y$ son términos semejantes
2) $8x^3y^2, -7x^3y^2,$ y $20x^3y^2$ son términos semejantes
3) $3x^2y$ y $20x^3y^2$ no son términos semejantes

Los términos semejantes se pueden combinar aplicando las propiedades de los númros reales. Con esto queremos decir por ejemplo que la propiedad distributiva permite expresar la suma de dos o mas términos semejantes como un solo monomio.

Ejemplos:
Sumar los siguientes términos:

1) $3x^2y + 5x^2y = (3 + 5)\,x^2y = 8x^2y$

2) $\frac{3}{2}x^3y^2z^5 + 8x^3y^2z^5 + 20x^3y^2z^5$
$= (\frac{3}{2} + 8 + 20)x^3y^2z^5 = \frac{59}{2}x^3y^2z^5$

3) $3x^2y + 5x^3y$, no se pueden sumar, porque no son términos semejantes.

4) $8x^3y^2z^5 + 5x^2y + 2x^3y^2z^5 + 12x^2y$

Observe que hay términos que tienen exactamente las mismas variables, elevadas a los mismos exponentes, los cuales se pueden sumar entre si.

Al reagrupar los términos de la anterior expresión y sumas, se obtiene:

$$\begin{aligned} 8x^3y^2z^5 + 5x^2y + 2x^3y^2z^5 + 12x^2y &= 8x^3y^2z^5 + 2x^3y^2z^5 + 5x^2y + 12x^2y \\ &= 10x^3y^2z^5 + 17x^2y \quad \text{al sumarlos} \end{aligned}$$

2.3.3 Símbolos de agrupación y jerarquía de operaciones.

Los símbolos de agrupación más usados son paréntesis, corchetes y llaves. Para agrupar términos semejantes debe recordar que necesita sumar o restar los coeficientes de los términos semejantes y continuar con la jerarquía de operaciones que se asume para los números reales (la multiplicación y la división tienen una jeraquía mayor sobre la suma y resta).

Para simplificar las expresiones, usted deberá eliminar los paréntesis apoyándose en la propiedad distributiva.

A continuación se presentan varios ejemplos para que usted vea, paso a paso, como se llega a la forma simple.

Ejemplos:
Simplificar

1) $4 - 2(2x + 3)$
$= 4 - 4x - 6$ eliminando paréntesis
$= -4x - 2$ reduciendo términos semejantes

2) $4 - 2(3x) + 6(5x)$
$= 4 - 6x + 30x$ multiplicando
$= 4 + 24x$ sumando términos semejantes

3) $2x - 4(3x)$
$= 2x - 12x$ efectuando primero la multiplicación
$= -10x$ sumando términos semejantes

Ejemplos:
Opere y simplifique

1) $2x - 4(3x) + 10x \div 2$

Como en la expresión aparecen multiplicaciones y divisiones, la jerarquía de operaciones recomienda efectuarlas en el orden en que estas aparecen. Así:

$2x - 4(3x) + 10x \div 2$	
$= 2x - 12x + 5x$	efectuando las multiplicaciones y divisiones
$= -5x$	reduciendo términos semejantes

2) $(6x)3y \div 9 + (8x \div 4)(3y)$

$= 18xy \div 9 + 2x(3y)$	efectuando operaciones en el orden en que aparecen
$= 2xy + 6xy$	efectuando operaciones
$= 8xy$	reduciendo términos semejantes

3) $2[3(x-1)] + 5[2(3x + 10)]$

$= 2[3x - 3] + 5[6x + 20]$	distributividad dentro de los corchetes
$= 6x - 6 + 30x + 100$	multiplicando
$= 36x + 94$	reduciendo términos semejantes

Nuevamente recuerde que al trabajar con expresiones algebraicas estará utilizando números reales, por lo que todas las propiedades estudiadas anteriormente son válidas.

Ejemplos:
Reducir la siguiente expresión

$9xy^2 + 2x^2y + 8xy^2 + 10x^2y$	
$= (9 + 8)xy^2 + (2 + 10)x^2y$	reduciendo términos semejantes
$= (17)xy^2 + (12)x^2y$	sumando

2.3.4 Adición y Sustracción de expresiones algebraicas.

para sumar y restar expresiones algebraicas se debe tener en cuenta que solamente se pueden sumar y restar términos semejantes.

Ejemplos:

Efectúe

1) $2x^3 + 3x^2 + x - (6x^3 + 5x^2 + 5x)$

$= 2x^3 + 3x^2 + x - 6x^3 - 5x^2 - 5x$ eliminando paréntesis

$= (2 - 6)x^3 + (3 - 5)x^2 + (1 - 5)x$ reduciendo términos semejantes

$= -4x^3 - 2x^2 - 4x$

Fíjese bien en el segundo paréntesis, fue lo que primero se atendió. Una vez más, estamos siguiendo la misma jerarquía de operaciones que se conoce para números reales.

2) $(x^3 + x^2 + x + 5) -3(x^2 + 6x - 1)$

$= x^3 + x^2 + x + 5 - 3x^2 - 18x + 3$ aplicando la distributividad

$= x^3 + x^2 - 3x^2 + x - 18x + 5 + 3$ agrupando términos semejantes

$= x^3 - 2x^2 - 17x + 8$ sumando términos semejantes

En el problema anterior observe como se eliminaron los paréntesis, y es de especial importancia ver de que manera el signo menos antes del segundo paréntesis, afectó los tres términos que se encontraban encerrados por estos signos de agrupación.

Veamos algunos otros problemas con sumas o diferencias.

Ejemplos:

Efectúe

1) $(5x + 3x)2x + (6x + 4x)5x$

$= (8x)2x + (10x)5x$ efectuando las sumas en cada paréntesis

$= 16x^2 + 50x^2$ efectuando las multiplicaciones

$= 66x^2$ sumando términos semejantes

2) $(20x^2 y) - (60x^2 y)$ eliminando paréntesis

$= 20x^2 y - 60x^2 y$ sumando términos semejantes

$= -40x^2 y$ sumando términos semejantes

3) $(3x)(10x) + (20x)(2x) + (x)(5x)$

$= 30x^2 + 40x^2 + 5x^2$ efectuando multiplicaciones

$= 75x^2$ sumando términos semejantes

EJERCICIOS

1) Defina cada uno de los siguientes conceptos:

1. Expresión Algebraica
2. Coeficiente
3. Variable
4. Témino Algebraico
5. Polinomio
6. Términos semejantes

2) Reduzca términos semejantes en cada una de las expresiones siguientes:

1. $2a + 5a - a$ **2.** $3x - 7x + x$ **3.** $8 - 12y - 13y$
4. $a - 5b + 4b$ **5.** $2ab - b + 6ab$ **6.** $10xy + y - 7xy - 8y$
7. $3xy - zy + 5xy - 2yz$ **8.** $4ax - 10bx - 9bx - 4ax$

3) Obtenga la suma de los siguientes polinomios

1. $2a + 6b,\ 7a - 2b$
2. $4x - 3y,\ 2x - 6y$
3. $x - 3y,\ 2y - 5x$
4. $7a + b,\ -3a - 4b$
5. $x + y - 3,\ 2x - y - 5$
6. $3x + 2y - 4,\ 6y - 4x + 1$
7. $2x - 3y + 4,\ 2y - x - 2$
8. $x + y - 7,\ 3y - 4x - 1$
9. $3x - 8,\ 7 - 4x,\ 2x - 1$
10. $5x + 6,\ -3x + 2,\ x - 9$
11. $2x - 3y,\ -4x + 7y,\ -x - 2y$
12. $x - 3y,\ 6x - 3y,\ -x + 2y$
13. $3x - 2y + 1,\ 2x + 5y - 6,\ 3 - x - 3y$
14. $4x - 3y + 13,\ 7x + 8y - 6,\ 2y - 5 - 8x$
15. $5x - 3y + 1,\ 2y - x - 7,\ 12 + 6y - 15x$
16. $2x - 3y + z,\ 2y - x,\ 3y - 2z - 3x$
17. $a + 10b - 9,\ 3a - 5b + 4c,\ 2c + b - 6$
18. $5ab - 2a + b,\ ab + 2a - 3,\ 5a - ab$
19. $10b + 5bc - 6c,\ 7bc - 4b + c,\ 9c - 8bc$
20. $8xy - 2yz,\ 2xy - z + 6yz,\ 9yz - 7yx - 3z$

4) Elimine los símbolos de agrupación y reduzca términos semejantes

1. $3a + (2 + 5a)$ **2.** $a + (2a + 3)$ **3.** $2a + (8 - a)$
4. $3a + (4 - 2a)$ **5.** $7a - (a + 7)$ **6.** $2a - (a + 6)$
7. [illegible]$x - (2x - 4)$ **8.** $3x - (x - 3)$ **9.** $5x - (1 - 3x)$
10. $2x - (2 - x)$ **11.** $4 + 6(x - 1)$ **12.** $5 + 5(2x - 3)$
13. $7 - 2(3x - 8)$ **14.** $6 - 3(2x - 1)$ **15.** $13 - 3(5x - 1)$
16. $17 - 7(3x - 4)$ **17.** $(2x - 3y) - 4(x - 5y)$

18. $2(5x - 4y) - (7x + y)$
19. $3(2a - b) - 4(a + b)$
20. $5(b - 4a) - 6(b - 3a)$
21. $(a - 3b) - 3(a - 2b)$
22. $8(2a - b) - 4(b - a)$
23. $3a - (2b + 3a) + (b + a)$
24. $9 - 2(a + 3)+(a + 2)$
25. $13 + 2(a + 5)-(7 + a)$
26. $x - 3(2x + 3)+(x + 1)$
27. $12x -(12 - 5x)+2(3x-4)$
28. $7 - 4(2x - 5) + 3(x - 8)$
29. $3x +\{2 -(x-3)\}$
30. $5x +\{6-(2x-1)\}$
31. $2x + \{y -(x - y)\}$
32. $9y +\{3x-(y + 4x)\}$
33. $10 - \{8 - 2(x - 5)\}$
34. $a - \{7 - 3(4 -a)\}$
35. $x - \{7 - 3(4 - a)\}$
36. $3x - \{6-2(2-3x)\}$
37. $4x - \{9-4(3-x)\}$
38. $4x + \{x - (2x - 3)\}- \{5-2(1 - x)\}$
39. $x - \{3x + (4 - x)\}- \{8 - 3(x - 2)\}$
40. $3x - \{y - (x-2y)\} - \{2y - (x + 3y)\}$
41. $3y - \{x - 2(3x - y)\} - \{2y - (x + 3y)\}$
42. $2x - \{y + (1 - x)\} - \{1 - (y - 3x)\}$
43. $7 - 2\{x + (2x - 1)\} - \{5 - 2(x + 3)\}$
44. $6 + 4\{x -(2x + 3)\} - \{7 + 3(x - 2)\}$
45. $3 + 2\{2x -(3x - 1)\} + \{9 - 4(x + 3)\}$
46. $8 - 3 \{8 + 4(x - 4)\} - \{2x - 3(2x - 3)\}$
47. $15 - 5\{4 - 2(x + 1)\} - \{3x - 5(x + 4)\}$
48. $2x - \{5y - \{2x - y +(x-y)\}\}$
49. $10 + \{x -\{y +(x-3) - (y - 6)\}\}$
50. $3a + \{b - 2 - ((a - b) + (b - 1))\}$

5) Reste la segunda expresión de la primera

1. $2a + b - 3c,\ 3a + 2b + 4c$
2. $7a - 5b + 18c,\ 6a - 6b + 19c$
3. $5x + 2y - 16z,\ 7x - 2y + 13z$
4. $7a - 3k + 4p,\ 8a - 4k - 2p$
5. $3a^2 + 14b^2 - 5c^2,\ 2a^2 + 13b^2 - 6c^2$
6. $5x^2 - 17y^2 + 4z^2,\ 2x^2 - 18y^2 + 5z^2$
7. $9ax - 14ax^2 - 8a^2x,\ 2ax - 15ax^2 - 9a^2x$
8. $6p^2q^2 - 5pq^2 - 12pq,\ 6p^2q^2 - 7pq^2 - 13\ pq$

6) Sume las siguientes expresiones

1. $4y - 3s + 2r,\ 5y - 4s + 3r,\ -8y + 8s -4r$
2. $8p - 7q + 5r,\ -3p + 9q + 3r,\ -4p + 3q - 7r$
3. $5a - 8ab - 6ab^2,\ 4a + 6ab + 5ab^2,\ -8a + ab + ab^2$
4. $2x + 3x^2 +5x^3,\ 3x + 4x^2 + 6x^3,\ -4x -6x^2 + 3x^3$
5. $7x + 8ax - 4ax^2,\ 4x + 5ax + 3ax^2,\ -8x - 9ax + 2ax^2$
6. $4ax - 5a^2x - 8ax^2,\ 3ax + 7a^2x + 6ax^2,\ -6ax + a^2x + 3ax^2$

7) ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios?

A. $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$	B. $\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 7$	B $3x^2 - 2x - 4$
D. $2t^5 - \sqrt{2}\,t^3 + 5t - 12$	E. $5x^2 - 3xy + 7y^2$	F. $(x^2 - 3x + 7)(2x^2 - 5)$
G. $2x - 3$	H. $2x + y - \frac{1}{2}$	I. $t^4 + 1$
J. $2x - 3y - 5$	K. $m^2 - 2mm + n^2$	

8) En los ejercicios siguientes realice las operaciones indicadas y encuentre el grado de los polinomios resultantes.

1. $(x^3 - 2x^2 + 3x + 5) + (x^4 - 3x^3 + 5x - 2)$
2. $(x^3 + 7 - 5x + 5x^2) + (x^3 - 3x^2 + 7 + 5x)$
3. $(a^2 + 1 + 3a^4) + (1 - a^3 + 4a^4)$
4. $(x^2y + xy - y^3) - (xy^2 - yx + 3y^3)$
5. $\dfrac{14a^2b^3 + 2a^5b^8 + a^6b^7}{7ab^3}$
6. $\dfrac{(a^2b + b)\,(ab^3 - a^2b)}{ab^3}$

9) Efectúe las operaciones y simplifique

1. $(6x + 3) + (x - 5)$
2. $(6x + 3) + (4x - 2)$
3. $(x^2 - 6x + 3) - (2x + 5)$
4. $(x - 4) - (x^2 - 4x + 6)$
5. $(4y^2 + 6y - 3) - (2y^2 + 6)$
6. $(5x - 7)(2x^2 - 3x + 12)$
7. $(-3x + 8)(-2x^2 - 3x - 5)$
8. $(6y^2 - 6y + 4) - (2y^2 - y + 7)$
9. $(-2x^2 + 4x - 5) - (5x^2 + 2x + 5)$
10. $(5x^2 - x - 1) - (-3x^2 - 2x - 5)$
11. $(-3x^3 + 4xy - 3xy^2) + (2x^3 - x^2y + xy^2)$
12. $(-2xy^2 + 4) - (-7x^2y + 12)$
13. $(6x^2 - 2x) - [3x - (4x^2 - 6)]$
14. $(3xy^2 - 2 - [-(4xy^2 + 3x) - 5xy]$
15. $5w - 6w^2 - ((3w - 2w^2) - (4w + w^2))$
16. $-\{-5r^2 - 3r) - (2r - 3r^2) - 2r^2\}$
17. Reste $(4x - 6)$ de $(3x + 5)$
18. Reste $(-x^2 + 3x + 5)$ de $(4x^2 - 6x + 2)$
19. Sume $-2x^2 + 4x - 12y - x^2 - 2x$
20. Reste $(5x^2 - 6)$ de $(2x - 4x + 8)$
21. Reste $(-6y^2 + 3y - 4)$ de $(9y^2 - 3y)$
22. Sume $6x^2 + 3xy - 2x^2 + 4xy + 3y$
23. Reste $(5x^2y + 8)$ de $(-2x^2y + 6xy^2 + 8)$
24. Reste $(6x^2y + 3xy)$ de $(2x^2y + 12xy)$
25. $x - \{x - [x - (x - 1)]\}$
26. $2t - 3(t + 2[t + 5)] + 1\}$
27. $3x - 2\{x - x(x + 4(x - 3)) - 5\}$
28. $-2t(-t - 3) - \{t^2 - t(2t + 3)\}$

2.4 Multiplicación de Expresiones Algebraicas

2.4.1 Multiplicación de monomios.

En un monomio reconocemos dos partes; la parte numérica llamada coeficiente y la parte variable. Así en $-18x^4y^5z^3$, -18 es el coeficiente y $x^4y^5z^3$ la parte variable; el monomio a^2b^3 aparentemente no tiene coeficiente, sin embargo como $a^2b^3 = 1a^2b^3$, su coeficiente es 1.

La multiplicación de monomios hace uso de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación y de las leyes de exponentes de la siguiente manera.

Ejemplos

Multiplicar

1) $(3x^3)(2x^5)$

Por las propiedades conmutativa y asociativa se pueden agrupar en un paréntesis los coeficientes y en otro las partes variables.

$$\begin{aligned}(3x^3)(2x^5) &= 3(x^3 2)x^5\\ &= 3(2x^3)x^5\\ &= (3 \times 2)(x^3x^5)\\ &= 6x^8 \qquad \text{por leyes de exponentes.}\end{aligned}$$

2) $(7x^3y)\ (-4x^8\ y^3)$

$$\begin{aligned}(7x^3\ y)\ (-4x^8y^3) &= (7 \times (-4))\ (x^3yx^8y^3)\\ &= -28(x^3x^8)\ (yy^3)\\ &= -28x^{11}y^4\end{aligned}$$

3) $\left[\dfrac{2a^3b}{3}\right]\left[\dfrac{3ab^2c}{4}\right]$

$$\begin{aligned}\left[\frac{2a^3b}{3}\right]\left[\frac{3ab^2c}{4}\right] &= \left[\frac{2}{3}\,a^3b\right]\left[\frac{3}{4}\,ab^2c\right]\\ &= \left[\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right](a^3b)\ (ab^2c)\\ &= \frac{1}{2}\,(a^3a)(bb^2)c\\ &= \frac{1}{2}\,a^4b^3c\end{aligned}$$

2.4.2. Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios nos basamos en la ley distributiva de los números reales y nos ayudamos con las leyes de exponentes y la simplificación de términos semejantes.

Ejemplos

Multiplique

1) $3x^2(6x^3-2x)$

$$\begin{aligned}
& 3x^2(6x^3-2x) & \\
&= 3x^2(6x^3+(-2x)) & \\
&= 3x^2(6x^3) - 3x^2(2x) & \text{Ley distributiva} \\
&= 18x^5 - 6x^3 & \text{Ley de exponentes}
\end{aligned}$$

2) $(x^3+3x)(2x^2-4x+5)$

$$\begin{aligned}
& (x^3+3x)(2x^2-4x+5) \\
&= (x^3+3x)\,2x^2 - (x^3+3x)4x + (x^3+3x)\,5 \\
& \qquad \text{Ley distributiva} \\
&= x^3(2x^2)+3x(2x^2)-x^3(4x)-3x(4x)+x^3(5)+3x(5) \\
& \qquad \text{Ley distributiva} \\
&= 2x^5+6x^3-4x^4-12x^2+5x^3+15x \\
& \qquad \text{Ley de exponentes} \\
&= 2x^5-4x^4+(6x^3+5x^3)-12x^2+15x \\
& \qquad \text{agrupación de términos semejantes} \\
&= 2x^5-4x^4+11x^3-12x^2+15x \\
& \qquad \text{suma de términos semejantes}
\end{aligned}$$

Al multiplicar un polinomio por otro se debe tener cuidado que cada término del primero quede multiplicado por cada término del segundo. Siguiendo esta regla se abrevia el trabajo.

Ejemplo

Para multiplicar $(2x^3+3x-1)(x^2-x+4)$ siguiendo la regla, se tiene

$$\begin{aligned}
& (2x^3+3x-1)(x^2-x+4) \\
&= 2x^3(x^2)+2x^3(-x)+2x^3(4)+3x(x^2)+3x(-x)+3x(4)-1(x^2)-1(-x)-1(4) \\
&= 2x^5-2x^4+8x^3+3x^3-3x^2+12x-x^2+x-4 \\
& \qquad \text{Leyes de exponentes} \\
&= 2x^5-2x^4+(8x^3+3x^3)+(-3x^2-x^2)+(12x+x)-4 \\
& \qquad \text{agrupación de términos semejantes} \\
&= 2x^5-2x^4+11x^3-4x^2+13x-4 \\
& \qquad \text{suma de términos semejantes}
\end{aligned}$$

2.4.3. Productos notables o especiales

En el trabajo algebraico encontramos frecuentemente algunos productos que es necesario reconocerlos rápidamente, por ello les llamamos productos notables. Cada uno de ellos puede verificarse al realizarse los productos indicados.

2.4.3.1. *Cuadrado de un binomio*

Si el binomio es una suma, entonces

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo

Efectúe

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)3 + 3^2\\ &= 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

Si el binomio es una diferencia

Ejemplo

Efectúe

$$\begin{aligned}(2x-3) &= (2x+(-3))^2\\ &= (2x)^2 + 2(2x)(-3) + (-3)^2\\ &= 4x^2 - 12x + 9\end{aligned}$$

Este último resultado puede generalizarse como el cuadrado de una diferencia, y se escribe

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2.4.3.2. Producto de la suma y resta de los mismos dos términos

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos

Efectúe

1) $(2x+3y)(2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2$
$= 4x^2 - 9y^2$

2) $(2-y^2)(2+y^2) = 2^2 - (y^2)^2$
$= 4 - y^4$

2.4.3.3. Producto de dos binomios con el mismo primer término

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$$

Ejemplos

Multiplique

1) $(x+3)(x-2) = (x+3)(x+(-2))$
$= x^2+(3+(-2))x+3(-2)$
$= x^2+x-6$

2) $(2x-5)(2x+8) = (2x+(-5))(2x+8)$
$= (2x)^2+(-5+8)2x+(-5)(8)$
$= 4x^2+6x-40$

Nota:

Con un poco de habilidad ya no es necesario escribir las diferencias como sumas, sino que se efectúan directamente.

2.4.3.4. Producto de dos binomios cualesquiera

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Ejemplos:

Multiplique

1) $(x^2-5)(2x+3) = x^2(2x)+(-5)(2x)+x^2(3)+(-5)3$
$= 2x^3-10x+3x^2-15$
$= 2x^3+3x^2-10x-15$ ordenado el polinomio según el grado de cada término

2) $(4t+9)(2t-3) = 4t(2t)+9(2t)+4t(-3)+9(-3)$
$= 8t^2+18t-12t-27$
$= 8t^2+6t-27$ sumando términos semejantes

2.4.3.5. Cubo de un binomio

Si el binomio es una suma

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Si el binomio es una diferencia

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos

Desarrolle

1) $(4v+u^2)^3 = (4v)^3+3(4v)^2u^2+3(4v)(u^2)^2+(u^2)^3$
$= 64v^3+48v^2u^2+12vu^4+u^6$

2) $(2x - 3y)^3$ $= (2x)^3+3(2x)^2(-3y)+3(2x)(-3y)^2+(-3y)^3$
$= 8x^3 +3(4x^2)(-3y)+ 6x(9y^2)-27y^3$
$= 8x^3 -36x^2 y + 54xy^2 - 27y^3$

2.4.3.6. Producto de un binomio por un trinomio que da como resultado una suma de cubos

$$(a + b)\ (a^2 - ab + b^2)= a^3 + b^3$$

Ejemplos
Multiplique
1) $(w+3)(w^2-3w+9)$

El primer término del binomio, w +3, es w y el segundo término 3. Luego

w^2	-	$3w$	+	9
primer término al cuadrado	signo menos	producto del primero por el segundo	signo más	cuadrado del segundo término

Ya que verificó esto, puede proceder a indicar el resultado del producto.

$$(w+3)(w^2-3w+9) = w^3 + 3^3$$
$$= w^3 + 27$$

2) $(2t^2 + 1)(4t^4 - 2t^2 +1)$

Verificamos que $4t^4$ es el cuadrado de $2t^2$, $2t^2$ el producto $2t^2(1)$ y 1 el cuadrado de 1. Una vez hecha la verificación, podemos afirmar que:

$$(2t^2 + 1)(4t^4 - 2t^2 +1) = (2t^2)^3 + 1^3$$
$$= 8t^6 + 1$$

2.4.3.7. Producto de un binomio por un trinomio que da como resultado una diferencia de cubos.

$$(a - b)\ (a^2 + ab + b^2)=a^3 - b^3$$

Ejemplos
Multiplique
1) $(9-y)(81+ 9y +y^2)$

Igual que en el caso anterior, verifique previamente si el trinomio corresponde a la forma del producto. Para nuestro ejemplo, 9-y es el binomio por lo que 81 es cuadrado del primer término 9; 9y el producto de los dos términos y y^2 el cuadrado el segundo término.

Así $\quad (9 - y)(81 + 9y + y^2) = 9^3 - y^3$

$$= 243 - y^3$$

2) $\quad (u^2 - v)(u^4 + u^2 v + v^2) = (u^2)^3 - v^3$

$$= u^6 - v^3$$

2.4.4. Factorización

Factorizar un número es escribirlo como producto de otros números, por ejemplo 36 puede factorizarse como 9x4 ó 3x12 ó $3^2 x 2^2$. Esto dice que para un mismo número hay varias factorizaciones, la última de las 3 anteriores, llamada factorización prima, es única. Con las expresiones algebraicas se procede de forma semejante, y a este proceso le llamamos factorización siendo su principal uso la simplificación de expresiones formadas por polinomios.

Ejemplo:

Si $\quad 2x(x+5) = 2x^2 + 10x$

entonces $\quad 2x^2 + 10x \quad$ factoriza como $2x(x+5)$

2.4.4.1. Expresiones que tienen un factor común

De la ley distributiva se sabe que $\quad a(b+c) = ab+ac$

luego si la expresión que se desea factorizar es $ab + ac$, debe observar que a es un factor común a ambos términos, luego al factorizarlo se obtiene

$$ab+ac = a(b+c)$$

Ejemplos

Factorice

1) $\quad 9x^2y^3 + 6xy^4 - 12x^5y^5$

Para garantizar que ha encontrado el mayor factor común, encuentre el máximo común divisor de todos los términos, puede comenzar por encontrar el MCD de 9, 6 y 12. Este es 3. Luego el MCD de x^2y^3, xy^4, x^5y^5; para esto busque en cada variable el menor exponente. En este caso el menor exponente para x es 1 y para y es 3; así el máximo común divisor de la parte literal es xy^3. Por tanto el factor común es $3xy^3$ y la expresión factorizada se escribe:

$$9x^2y^3 + 6xy^4 - 12x^5y^5 = 3xy^3\,(3x + 2y - 4x^4y^2)$$

Siempre puede verificar que su factorización es correcta, si multiplica la expresión factorizada para obtener la expresión original.

2) $\quad 5uv^2 - 10u^3v^3 - 25u^2v$

El MCD de 5, 10 y 25 es 5 y el MCD de uv^2, u^3v^3 y $u\ v$; luego $5uv^2 - 10u^3v^3 - 25u^2v = 5uv\,(v - 2u^2v^2 - 5u)$

2.4.4.2 Expresiones que tienen factor común por agrupación de términos

A algunas expresiones no se les puede extraer un factor, común a todos los términos, pero sí al agrupar algunos de ellos.

Ejemplo

Factorice $2xy - 3ny - 2mx + 3mn$

Los cuatro términos no tienen un factor en común, entonces buscamos si agrupando de dos en dos, se puede determinar un factor común en cada bloque. Así

$$2xy - 3ny - 2mx + 3mn = (2xy - 2mx) - (3ny - 3mn)$$
$$= 2x(y - m) - 3n(y - m)$$

Note que en cada término de la resta hay un factor común y - m, luego

$$2xy - 3ny - 2mx + 3mn = 2x(y - m) - 3n(y - m)$$
$$= (y - m)(2x - 3n)$$

2.4.4.3 Binomios que son la diferencia de dos cuadrados

En los productos notables se estableció que en el producto de la suma y diferencia de los mismos términos, $(a + b)(a - b)$, se escribe como diferencia de los cuadrados de los términos a y b, es decir $a^2 - b^2$. Por tanto, para factorizar una diferencia de cuadrados, se tiene

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Ejemplos

Factorice

1) $81x^2 - 25$ $= (9x)^2 - 5^2$
$= (9x - 5)(9x + 5)$

2) $4x^2 - (3y+z)^2$ $= (2x)^2 - (3y+z)^2$
$= (2x - (3y+z))(2x + (3y+z))$
$= (2x - 3y - z)(2x + 3y + z)$

2.4.4.4 Binomios que son la suma o diferencia de cubos

De la misma forma que antes, entre los productos notables se estableció que el producto del binomio $a + b$ con el trinomio $(a^2 - ab + b^2)$, se escribe como una suma de cubos a^3 y b^3. A su vez el producto de $(a - b)$ por $(a^2 + ab + b^2)$, se escribe como resta de cubos $a^3 - b^3$. Luego se tienen las siguientes factorizaciones:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Ejemplos

Factorice

1) $27x^6 - 1 = (3x^2)^3 - 1^3$

$= (3x^2 - 1)((3x^2)^2 + (3x^2)1 + 1^2)$

$= (3x^2 - 1)(9x^4 + 3x^2 + 1)$

2) $x^3y^9 - z^6 = ((xy^3)^3 - (z^2)^3)$

$= ((xy^3 - z^2)((xy^3)^2 + xy^3z^2 + (z^2)^2)$

$= (xy^3 - z^2)(x^2y^6 + xy^3z^2 + z^4)$

Algunas veces es necesario usar varias factorizaciones como en el siguiente

Ejemplo

3) $3x^7 - 3xy^6$

Comenzamos por buscar algún factor común

$3x^7 - 3xy^6 = 3x(x^6 - y^6)$

Observe que el binomio de la derecha puede factorizarse como diferencia de cubos o como diferencia de cuadrados. Si lo tomamos como diferencia de cuadrados, nos quedarán una suma de cubos y una diferencia de cubos, de la siguiente manera:

$$3x^7 - 3xy^6 = 3x((x^3)^2 - (y^3)^2)$$
$$= 3x(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$$

y para terminar factorizamos la suma y la diferencia de cubos

$$3x^7 - 3xy^6 = 3x(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2 - xy+y^2)$$
$$= 3x(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2 - xy+y^2)$$

2.4.4.5 Trinomios que son cuadrado perfectos

Se sabe del producto notable "cuadrado de un binomio" que

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

En los trinomios de la derecha se observa que dos de los términos son cuadrados perfectos y positivos a^2 y b^2, y que el otro término es el doble producto de la raíz cuadrada de los otros dos. Además, que si el coeficiente del término del doble producto es positivo, el trinomio factoriza como el cuadrado de una suma y si es negativo, como el cuadrado de una diferencia. Por tanto una expresión con estas características se llama cuadrado perfecto y factoriza como cuadrado de un binomio. Así

$$\mathbf{a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2}$$
$$\mathbf{a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2}$$

Ejemplos

Factorice

1) $4x^2+12x+9$

Los términos 4^2 y 9 son cuadrados perfectos positivos

$4x^2=(2x)^2$ y $9=3^2$

Además $12x=2(2x)(3)$

Por tanto $4x^2+12x+9=(2x+3)^2$

2) $-20t+4+25t^2$

Los términos $25t^2$ y 4 son cuadrados perfectos, $25t^2=(5t)^2$, $4=2^2$

y $-20t=-2(2)(5t)$

Luego $-20t+4+25t^2=25t^2-20t+4$ ordenando respecto a t

$=(5t-2)^2$

3) $9x^2-6xy+y^2$

Los términos $9x^2$ y y^2 se escriben $9x^2=(3x)^2$ y $y^2=(y)^2$

Además $-6xy=-2(3x)(y)$, por lo tanto

$9x^2-6xy+y^2=(3x-y)^2$

2.4.4.6 Trinomios factorizables que no son cuadrados perfectos

Examinemos un trinomio de la forma x^2+bx+c, y comparémoslo con el resultado del producto

$$(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$$

Lo anterior sugiere que para factorizar x^2+bx+c basta encontrar los números p y q tales que $p+q=b$ y $pq=c$. Si tales números existen se tiene la factorización

$$x^2+bx+c=(x+p)(x+q)$$

Ejemplo

Factorice.

1) $x^2+8x+15$

Buscamos p y q tales que $pq=15$ y $p+q=8$. Es claro que estos números son 3 y 5. Por lo tanto

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$$

2) x^2-3x+2

Hay que encontrar p y q que cumplan $pq=2$ y $p+q=-3$. Estos números son -2 y -1. Luego

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

3) x^2-x-6

Buscamos p y q que cumplan $pq=-6$ y $p+q=-1$. Esto se cumple por -3 y 2. Por lo tanto

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

Si el trinomio que se va a factorizar es de la forma $ax^2 + bx + c$, con a diferente de uno, se expresa como el producto de un número real por un trinomio, cuyo término cuadrático tenga un coeficiente igual a 1, y así factorizarlo como en el caso anterior. Es decir

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a} \cdot a(ax^2 + bx + c) \qquad \text{multiplicando por } 1 = \frac{1}{a} \cdot a$$

$$= \frac{1}{a}\ ((ax)^2 + b(ax) + ac) \quad \text{distribuyendo } a \text{ en el trinomio}$$

$$= \frac{1}{a}\ (u^2 + bu + d)$$

donde $u = ax$ y $d = ac$

Ahora se debe factorizar $u^2 + bu + d$ que tiene coeficiente 1 en el término no cuadrático.

Ejemplos:

Factorice

1) $3x^2 + 7x + 4$

Ya que el coeficiente de x^2 no es 1, el trinomio se multiplica por $\frac{3}{3}$ de la siguiente forma

$$3x^2 + 7x + 4 = \frac{1}{3}\ ((3x)^2 + 7(3x) + 12)$$

Note que $\frac{3}{3} = 1$, por tanto el trinomio sigue siendo el mismo, pero ahora se va a factorizar uno más sencillo, $u^2 + 7u + 12$, es decir, vamos a buscar p y q tales que $pq = 12$ y $p + q = 7$. Los números son 3 y 4, por tanto

$$3x^2 + 7x + 4 = \frac{1}{3}\ (u^2 + 7u + 12) \text{ donde } u = 3x$$

$$= \frac{1}{3}\ (u + 3)\ (u + 4)$$

$$= \frac{1}{3}\ (3x+3)\ (3x+4)$$

$$= \frac{1}{3}\ (3)(x+)\ (3x+4) \qquad \text{sacando factor común}$$

$$= (x+1)\ (3x+4) \qquad \text{simplificado}$$

Con un poco de habilidad, no es necesario utilizar u.

2) $2x^2 - x - 3$

$$2x^2 - x - 3 = \frac{1}{2}\left[(2x)^2 - (2x) - 6)\right]$$ multiplicando convenientemente por $\frac{2}{2}$

$$= \frac{1}{2}(2x - 3)(2x + 2)$$ buscando p y q tales que $pq = -6$ y $p + q = -1$

$$= \frac{1}{2}(2x - 3)(2)(x + 1)$$ sacando factor comúm

$$= (2x - 3)(x + 1)$$ simplificando

2.5 División de polinomios

Para dividir un monomio por otro, se utilizan las leyes de exponentes.

Ejemplo

$$\frac{27x^2y}{12x^3y} = \frac{9(3)x^2y}{4(3)x^2xy}$$

$$= \frac{9}{4x}$$

Basados en la ley distributiva se puede dividir un polinomio por un monomio; suponga que a, b, c son monomio, el cociente $\frac{a+b}{c}$, puede llevarse a la forma $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{1}{c}(a+b) = \frac{1}{c}a + \frac{1}{c}b = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Ejemplo

$$\frac{3x^2 + 5x}{2x} = \frac{3x^2}{2x} + \frac{5x}{2x}$$ por el resultado anterior

$$= \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$ por leyes de exponentes.

Para efectuar la división de dos polinomios en una variable debemos comenzar por ordenar ambos polinomios en forma descendente respecto al exponente de la variable. Luego dividimos el primer término del dividendo (polinomio que va a ser dividido) por el primer término del divisor. El resultado nos da el primer término del cociente. Luego multiplicamos todo el divisor por el primer término del cociente y este resultado se resta del dividendo. Este resto se usará ahora como dividendo para seguir con el proceso hasta que el residuo sea cero o un término con grado menor que el del divisor.

Ejemplo

Dividir $4x^3 + 6x^2 + 1$ por $2x - 1$

Ya que ambos polinomios están ordenados en forma descendente respecto a x, procedemos a realizar la división, de acuerdo a lo apuntado anteriormente. Como en el dividendo no existe término en x, es aconsejable dejar espacio para cualquier término en x que pudiera aparecer. La división se plantea como una división artimética.

$$
\begin{array}{llrl}
 & & 2x^2 + 4x + 2 & \text{(cociente)} \\
\text{(divisor)} & 2x + 1 & \overline{\left) 4x^3 + 6x^2 \qquad + 1 \right.} & \text{(dividendo)} \\
 & & \underline{4x^3 - 2x^2 \qquad\quad} & \\
 & & 8x^2 \qquad + 1 & \\
 & & \underline{8x^2 - 4x^2} & \\
 & & 4x + 1 & \\
 & & \underline{4x - 2} & \\
 & & 3 & \text{(residuo)}
\end{array}
$$

2.6 Definición de expresión racional

Se llama expresión racional al cociente de dos polinomios

Ejemplos

$$\frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{2x - 1} \; ; \; \frac{1}{x + 3} \; ; \; \frac{2x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 + 5x - 3}$$

La primera de estas expresiones racionales no es más que la división que se realizó en el numeral anterior. De acuerdo al resultado de la división esta expresión podría escribirse como la suma de un polinomio y una expresión racional de la siguiente forma:

$$\frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{2x - 1} = 2x^2 + 4x + 2 + \frac{3}{2x - 1}$$

2.6.1 Simplificación de expresiones racionales

Ya que cada variable representa números reales, las reglas de la aritmética pueden usarse con toda validez para simplificar expresiones racionales. Por lo tanto enunciamos la primera regla de la siguiente manera: *si se mulitiplica numerador y denominador por el mismo factor diferente de cero, no se altera la expresión.* En símbolos

$$\frac{A}{B} = \frac{CA}{CB}, \text{ siempre que } C \text{ es diferente de cero}$$

Análogamente, un factor, diferente de cero, común al numerador y denominador puede ser cancelado del cociente.

La propiedad anterior se fundamenta en el elemento identidad para la multiplicación. Es decir

$$\frac{CA}{CB} = \frac{C}{C} \cdot \frac{A}{B} = 1 \cdot \frac{A}{B} = \frac{A}{B}$$

Para lograr esta simplificación en una expresión racional buscamos la factorización prima de numerador y denominador, para luego cancelar los factores comunes.

Ejemplos:
Simplificar

1) $\dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$

$$\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(2x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \quad \text{factorizando}$$

$$= \frac{2x+3}{x+1} \quad \text{válido si } x \text{ es diferente de } -1$$

2) $\dfrac{2r^3 - 6r^2 - 20r}{2r^5 + 16r^2}$

$$\frac{2r^3 - 6r^2 - 20r}{2r^5 + 16r^2} = \frac{(2r)(r^2 - 3r - 10)}{2r^2(r^3 + 8)} \quad \text{factor común}$$

$$= \frac{(r-5)(r+2)}{r(r+2)(r^2 - 2r + 4)} \quad \text{simplificando para } r \neq 0,\ r \neq -2$$

$$= \frac{r-5}{r(r^2 - 2r + 4)}$$

2.6.2 Operaciones con expresiones racionales

Las reglas para operar números racionales se extienden a las operaciones con expresiones racionales. Comenzaremos con productos y cocientes.

Recordemos que para lo números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$,a,b,c,d enteros, b y d diferentes de cero, se tiene:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

La división aparece algunas veces planteada como expresión compleja, es

decir, $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ lo cual significa $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$

y el resultado es el mismo que antes $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

Ejemplos:

Realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado

1) $\dfrac{-3z^2 +z +2}{2z} \cdot \dfrac{z^3 - z}{z +1}$

$$\frac{-3z^2 +z+2}{2z} \cdot \frac{z^3 - z}{z +1} = \frac{(-3z^2 +z +2)\ (z^3 - z)}{2z(\ z +1)}$$

$$= \frac{-(3z+2)\ (z - 1)z(z - 1)(z + 1)}{2z(\ z +1)}$$

$$= \frac{-(3z+2)\ (z - 1)^2}{2}$$

2) $\dfrac{3x^2y - 4xy +y}{y + 2xy -3x^2y} \div \dfrac{9x^2 - 1}{3x^2+x}$

$$\frac{3x^2y - 4xy +y}{y + 2xy -3x^2y} \div \frac{9x^2 - 1}{3x^2+x} = \frac{(3x^2y - 4xy +y)(3x^2+x)}{(y + 2xy -3x^2y)(9x^2 - 1)}$$

$$= \frac{y(3x^2- 4x + 1)\ x(3x +1)}{-y(3x^2- 2x - 1)(3x -1)(3x +1)}$$

$$= \frac{y(3x- 1)\ (x -1)\ x(3x +1)}{-y(3x +1)(x -1)(3x -1)(3x +1)}$$

$$= \frac{x}{(\ -1)(3x +1)} = \frac{-x}{3x +1}$$

3)
$$\frac{\dfrac{ab-2b}{a^2+3a}}{\dfrac{ab-b}{a}}$$

$$\frac{\dfrac{ab-2b}{a^2+3a}}{\dfrac{ab-b}{a}} = \frac{(ab-2b)a}{(a^2+3a)(ab-b)}$$

$$= \frac{b(a-2)a}{a(a-3)b(a-1)}$$

$$= \frac{a-2}{(a+3)(a-1)}$$

De igual forma, para la adición (sustracción) de expresiones racionales se utiliza el mismo procedimiento que con números racionales: Se encuentra el mínimo común denominador, este será aquel que contenga como factor cada uno de los denominadores originales; se convierte cada expresión a una equivalente con denominador igual al que se determinó como mínimo común denominador, para aplicar la regla.

$$\frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$$

Ejemplos:

Realice las operaciones indicadas y simplifique.

1) $\dfrac{2x+3}{x^2-x-2} + \dfrac{x}{x^2-1}$

Se factorizan los denominadores

$$x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$$
$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

Se busca el mínimo común denominador: $(x+1)(x-2)(x-1)$ y se multiplica cada fracción por una expresión adecuada que complete el denominador.

Así: $\dfrac{2x+3}{x^2-x-2} = \dfrac{2x-3}{(x+1)(x-2)}$

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{x-1}{x-1}$$

Note que al multiplicar $\dfrac{x-1}{x-1}$ está multiplicando por 1, lo cual mantiene la igualdad.

De igual forma
$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x-2}{x-2}$$

Por tanto,

$$\frac{2x+3}{x^2-x-2} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{2x+3}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{x-1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x-2}{x-2}$$
$$= \frac{(2x+3)(x-1)+x(x-2)}{(x+1)(x-2)(x-1)}$$
$$= \frac{3x^2-x-3}{(x+1)(x-2)(x-1)}$$

2) $\dfrac{1}{2x^2-x} + \dfrac{x^2+2}{2x^2+3x-2} - \dfrac{1}{x^2+2x}$

Las factorizaciones de los denominadores son:

$$2x^2-x = (2x-1)x$$
$$x^2+2x = (x+2)x$$
$$2x^2+3x-2 = (2x-1)(x+2)$$

por tanto el mínimo común denominador es: $x(x+2)(2x-1)$

$$\frac{1}{2x^2-x} + \frac{x^2+2}{2x^2+3x-2} - \frac{1}{x^2+2x}$$
$$= \frac{1}{x(2x-1)} \cdot \frac{x+2}{x+2} + \frac{x^2+2}{(2x-1)(x+2)} \cdot \frac{x}{x} - \frac{1}{x(x+2)} \cdot \frac{2x-1}{2x-1}$$
$$= \frac{x+2+x(x^2+2)-(2x-1)}{x(x+2)(2x-1)}$$
$$= \frac{x^3+x+3}{x(x+2)(2x-1)}$$

3) $$\frac{1 - \dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{1}{x} - x}$$

Esta expresión es una fracción compleja, equivalente a

$$\left[1 - \frac{2}{x+1}\right] \div \left[\frac{1}{x} - x\right]$$. Vista así, la jerarquía de las operaciones nos indica que primero se deben realizar las operaciones dentro del paréntesis.
Por lo tanto

4) $$\frac{1 - \dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{1}{x} - x} = \frac{\dfrac{x+1-2}{x+1}}{\dfrac{1-x^2}{x}}$$

$$= \frac{\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1-x^2}{x}}$$

$$= \frac{(x-1)x}{(x+1)(1-x^2)}$$

$$= \frac{(x-1)x}{-(x+1)(x^2-1)} = \frac{x(x-1)}{-(x+1)(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-x}{(x+1)^2}$$

2.6.3 Racionalización de expresiones que contienen raíces cuadradas.

En algunos cocientes en que aparecen radicales, se acostumbra operarlos para efectos de simplificación o para hacer más simples algunos cálculos buscando eliminar las raíces del denominador y en casos muy especiales del numerador. A este proceso de eliminar radicales se le llama *racionalización*. Trataremos aquí únicamente el caso de raíces cuadradas.

Para racionalizar el denominar de expresiones como $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$ ó $\sqrt{\frac{2}{3}}$

se multiplica numerador y denominador por la raíz que aparecen en el denominador.

Ejemplos

1) Para racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{3}$. Note que se multiplica tanto numerador como denominador para no alterar la expresión ya que es equivalente a multiplicar por 1, elemento identidad de la multiplicación.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Con esto se logra que en el denominador quede una raíz cuadrada elevada al cuadrado, lo cual por la leyes de radicales, sabemos que es igual a la cantidad subradical; en este caso

$$\sqrt{3}\ \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3.$$

Por tanto

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) De la misma forma, para racionalizar el denominador de $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$, semultiplica por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ y se tiene

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{24}\,\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$$

Tanto en el numerador como en el denominador aplicamos la ley de radicales que corresponde y se obtiene

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2}}$$

esta expresión simplificada se escribe $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

3) La expresión $\sqrt{\frac{2}{3}}$, puede escribirse como cociente de raíces $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y así la racionalización del denominador se logra al multiplicar por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) Si en la expresión $\sqrt{\frac{2x}{3y}}$, se requiere racionalizar el numerador, el procedimiento es multiplicar por $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$, para obtener

$$\sqrt{\frac{2x}{3y}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3y}} \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \frac{2x}{\sqrt{6xy}}$$

donde se puede observar que el numerador ya no contiene radical.

Algunas otras expresiones contienen radicales en el denominador, pero como términos de un binomio. En estos casos debemos buscar un factor que al multiplicarlo por el denominador elimine el radical.

Ejemplos

Para racionalizar el denominador de la expresión $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$, note que si la expresión $2 + \sqrt{3}$ se multiplica por $2 - \sqrt{3}$ se elimina el radical. Apliquemos la propiedad distributiva de los números reales a dicho producto.

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) &= 2.2 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}.\sqrt{3}\\ &= 2.2 - (\sqrt{3})^2\\ &= 4 - 3\\ &= 1\end{aligned}$$

Por tanto, al multiplicar numerador y denominador por $2 - \sqrt{3}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{4}{2+\sqrt{3}} &= \frac{4}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= \frac{4(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2}\\ &= \frac{4(2-\sqrt{3})}{4-3}\\ &= \frac{4(2-\sqrt{3})}{1}\\ &= 4(2-\sqrt{3})\end{aligned}$$

cuyo denominador ya está racionalizado.

Las expresiones $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$, se llaman *conjugados*. En general el conjugado de $a + b$ es $a - b$ y viceversa.

2) Racionalizar $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Se multiplica por $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ y se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} \\
&= \sqrt{5}+\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

3) Racionalizar el numerador de la expresión $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Para racionalizar el numerador se multiplica el cociente por $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ y se tiene,

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS

1) Calcule los siguientes productos

1. $(x+5)(x+3)$
2. $(u+v)(u^2+2v)$
3. $(2x+5)(3x-1)$
4. $(u^2+3u-2)(u-2)$
5. $(v^2-5)(v+2)$
6. $(2y^2+3y-4)(y^3+3)$
7. $(x+1)(2x^2-2)(x^3+5)$
8. $(y-2x)(x^2-4y)(x^3-y)$
9. $(2x^2+5y)^2$
10. $(x-1)^2(x+3)^2$
11. $(rs-1)(r^2s^2+rs+1)$
12. $(2x+5)(4x^2+10x+25)$

2) Factorice los siguientes polinomios

1. $x^3y^2+2xy^2-3x^2y$
2. $11r^3s^4t^2-33r^4s^2t^2+44r^2s^3t^4$
3. $4x^2-1$
4. $9x^2y^4-16x^4y^2$
5. x^2-x-6
6. $2x^2+9x-5$
7. x^3-25x
8. r^2-25
9. $27m^3+8$
10. x^3-125
11. $\frac{x^2}{4}+3x+9$
12. $4x^2-20x+25$

3) Utilice productos notables para calcular los siguientes productos

1. $(5x+4y)(5x-4y)$
2. $(rs-1)(r^2s^2+rs+1)$
3. $(2x+5)(4x^2+10x+25)$
4. $(x^2-3y^2)^2$
5. $(x-9)(x+4)$
6. $(3x+1)(2x-3)$
7. $(x^2+5y)^3$
8. $(2u^2-3v)^3$
9. $(3x+2y)^2$
10. $(x^2+1)(x^2-16)$
11. $(x+y+z)^2$
12. $(x-y-z)^2$

4) Encuentre el resultado de las siguientes divisiones de polinomios

1. $\dfrac{8x^3y}{-2xy}$
2. $\dfrac{18b^7c^3}{bc^2}$
3. $\dfrac{2m^3n-6mn}{2m}$
4. $\dfrac{4pq^3+8p^2q^2-16pq^5}{4pq^2}$
5. $\dfrac{3a^3(x+y)b^2-(x+y)}{a(x+y)}$
6. $\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$
7. $\dfrac{2x^2-5x-7}{x+1}$
8. $\dfrac{2x^3-3x^2+8x-2}{x^2-x+2}$
9. $\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x+2}$
10. $\dfrac{3x^3+19x^2+16x-12}{3x-2}$

5) Simplifique las siguientes expresiones

1. $\dfrac{5x^2 - 10xy}{25x}$

2. $\dfrac{4x^2y + 12xy + 18x^3y^3}{8xy^2}$

3. $\dfrac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$

4. $\dfrac{4x^2 - 9}{2x^2 - x - 3}$

5. $\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$

6. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 + 27}$

7. $\dfrac{x(x - 1) + x(x - 4)}{2x - 5}$

8. $\dfrac{xy - yw + xz - zw}{xy + yw + xz + zw}$

9. $\dfrac{4 - x^2}{x^2 - 7x + 10}$

6) Efectúe las operaciones y simplifique

1. $\dfrac{50x^5y^3}{12x^4y}$

2. $\dfrac{3}{x^3 - 2} - \dfrac{1}{2 - x}$

3. $\dfrac{x + 2}{x^2 + x - 2}$

4. $\dfrac{3(x - 3)}{6x^2 + 2x - 8} + \dfrac{3(x + 1)}{x^2 - 3x + 2}$

5. $\dfrac{2x}{x - 3} - \dfrac{2x}{x + 3} + \dfrac{36}{x^2 - 9}$

6. $\dfrac{x^2 + 2}{x^2 - x - 2} + \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 2}$

7. $\dfrac{16x^2}{y^4} \cdot \dfrac{5x^2}{4y^2}$

8. $(2x + 3) \cdot \dfrac{1}{4x + 10}$

9. $\dfrac{x - 3}{x + 3} \cdot \dfrac{2x^2 + 10x}{2x - 6}$

10. $\dfrac{x^2 - 7x - 12}{x + 4} \cdot \dfrac{1}{x + 3}$

11. $\dfrac{6x^2 - 14x - 12}{6x + 4} \cdot \dfrac{x + 3}{2x^2 - 2x - 12}$

12. $\dfrac{x^2 - y^2}{8x^2 - 16xy + 8x^2} \cdot \dfrac{4x - 4y}{x + y}$

13. $\dfrac{8x^2 - 8y^4}{x + 8y^2} \quad \dfrac{2x}{8(x + y^2)}$

14. $\dfrac{9y}{7z^3} \div \dfrac{3xy}{4z^2}$

15. $(2x + 3) \div \dfrac{4xy}{z}$

16. $\dfrac{2a + 2b}{3} + \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$

17. $\dfrac{1}{x^2 - 7x + 30} \div \dfrac{1}{x^2 - 5x - 24}$

18. $\dfrac{x^2 - 12x + 32}{x^2 - 6x - 16} \div \dfrac{x^2 - x + 12}{x^2 - 5x - 24}$

19. $\dfrac{(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} \div \dfrac{(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)}$

20. $\dfrac{8a^3 - 1}{4a^2 - 2a + 1} \div \dfrac{a - 1}{(a - 1)^2}$

21. $\dfrac{\frac{x^2 y}{4}}{\frac{2}{x}}$

22. $\dfrac{\frac{15a}{b^2}}{\frac{b^3}{5}}$

23. $\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}}$

24. $\dfrac{\frac{x}{4} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{x+4}{x}}$

25. $\dfrac{\frac{1}{x - 1} + 1}{\frac{1}{x - 1} - 1}$

26. $\dfrac{\frac{a + 1}{a - 1} + \frac{a - 1}{a + 1}}{\frac{a + 1}{a - 1} - \frac{a - 1}{a + 1}}$

4) Racionalice y simplifique

1. $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$

2. $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$

3. $\dfrac{4}{2 + \sqrt{3}}$

4. $\dfrac{12}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

5. $\dfrac{\sqrt{5} - 2}{3}$

6. $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$