3 LOGARITMOS

Los *logaritmos* fueron inventados por John Napier alrededor de 1614. La palabra *logaritmos* se deriva de dos palabras griegas, *logos*, que significa "razón o tratado" y *aritmos*, que significa "número". Los *logaritmos* tienen su origen histórico en la necesidad de facilitar cálculos numéricos.

¿Qué se entiende por logaritmo de un número positivo? Simplemente, otro número (cualquier número real). En breve se explicará la razón por la cual se habla únicamente de logaritmo de un número positivo.

Para iniciar, considere el número 2 y elévelo a la potencia 3, (simbólicamente escribimos 2^3). Operando obtenemos como resultado 8.

Lo anterior lo podemos expresar como:
" 3 es el número al que hay que elevar 2 para obtener 8 " ó
" 3 es el logaritmo base 2 de 8" (simbólicamente $\log_2 8 = 3$).

TERMINOLOGÍA:

2 recibe el nombre de base y 3 es el logaritmo de base 2 de 8.

FORMA LOGARITMICA	**FORMA EXPONENCIAL**
$\log_a x = y$	$x = a^y$

Como puede observarse, podemos reemplazar la palabra "*exponente*" por la palabra "*logaritmo*", indicando: el logaritmo en base a de x es la potencia a la cual se eleva a para obtener x; siendo $a > 0$, $a \neq 1$

Ejemplos:

FORMA LOGARITMICA	**FORMA EXPONENCIAL**
$\log_7 1 = 0$	$7^0 = 1$
$\log_4 16 = 2$	$4^2 = 16$

Ejemplos:

1) Obtenga el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_7 49$ b) $\log_5 \sqrt{5}$

c) $\log_6 \frac{1}{6}$ d) $\log_3 81$

e) $\log_{10} 0.001$

2) Determine x ó b si:

a) $\log_6 x = 2$ b) $\log_{27} x = \frac{2}{3}$

c) $\log_b 4 = \frac{1}{3}$ d) $\log_b 81 = -2$

3) Escriba en forma exponencial:

a) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ b) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

4) Escriba en forma logarítmica:

a) $10^{-3} = 0.001$ b) $27^{\frac{2}{3}} = 9$

3.1 Propiedades de los logaritmos

Como $\log_a x$ se puede interpretar como un exponente, parece razonable esperar que las leyes de los exponentes sirvan para obtener las leyes de los logaritmos.

Sean u, v números reales positivos y c cualquier número real.

Propiedad 1	$\log_a (uv) =$	$\log_a u + \log_a v$
Propiedad 2	$\log_a (u/v) =$	$\log_a u - \log_a v$
Propiedad 3	$\log_a (u^c) =$	$c \log_a u$

Se probará la primera propiedad:

Sean $r = \log_a u$ y $s = \log_a v$
Esto significa que $u = a^r$ y $v = a^s$
$uv = a^r a^s = a^{r+s}$, o sea, $\log_a uv = r + s$
por lo tanto, $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$.

Se recomienda, que siguiendo un proceso similar demuestre las otras dos propiedades.

También es importante reconocer lo que no dicen las propiedades:

$\log_a (u + v) \quad \neq \quad \log_a u + \log_a v$

$\log_a (u - v) \quad \neq \quad \log_a u - \log_a v$

$\log_a \left[\dfrac{u}{v}\right] \quad \neq \quad \dfrac{\log_a u}{\log_a v}$

3.2 Bases

La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa, porque si fuera negativa, al elevarla a potencias pares el resultado sería positivo y para potencias impares, el resultado sería negativo, esto nos daría una serie de números alternativamente positvos y negativo, y por tanto, habrían números positivos que no tendrían logaritmo.

Se ilustra lo anterior con los siguientes ejemplos:

Si la base es $b = -2$ entonces

$\log_{(-2)} (-2) = 1$
$\log_{(-2)} 4 = 2$
$\log_{(-2)} (-8) = 3$
$\log_{(-2)} 16 = 4$

Sin embargo $\log_{(-2)} 8$ no existe, puesto que no existe un número real n tal que $(-2)^n = 8$.
De la misma manera, si la base es $b = -4$ entonces $\log_{(-4)} 2$ indica encontrar un número real p, tal que $(-4)^p = 2$, que tampoco existe.

Los números negativos y el cero no tienen logaritmo porque siendo la base positiva, todas sus potencias, ya sean pares o impares, siempre son positivas.

Pudiendo tomarse como base de un sistema cualquier número positivo distinto de 1, los sistemas usados generalmente son dos:

a) Logaritmos cuya base es 10, llamados logaritmos comunes, simbólicamente, log x.

b) Logaritmos cuya base es el número e, llamados logaritmos naturales, simbólicamente, ln x.

3.3 El Número

En cálculo el número e surge del estudio de los valores que toma la expresión

$$\left[1+\frac{1}{x}\right]^x$$

en donde x es un entero positivo. Puede probarse que dichos valores se acercan al número e, a medida que x aumenta.

x	10	100	1000	10000	100000
$\left[1+\frac{1}{x}\right]^x$	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7183

$e = 2.718281828459...$

3.4 Calculadora

Dado que se dispone de calculadoras, no hay necesidad de los logaritmos como herramienta para efectuar cálculo. No obstante, la base 10 tiene diversidad de aplicaciones y por ello muchas calculadoras cuentan con una tecla **LOG** para calcular esos logaritmos.

Muchas calculadoras tienen una tecla **LN**, que sirve para calcular logaritmos naturales. Para hallar x cuando se conoce log x ó ln x se usa la tecla $\boxed{10^x}$ ó $\boxed{e^x}$ respectivamente.

Si la calculadora tiene una tecla **INV** (por inverso), se pulsa x y en seguida se presiona

INV **LOG** ó **INV** **LN**.

1) Escriba en forma logarítmica o exponencial según el caso.

	FORMA LOGARITMICA	FORMA EXPONENCIAL
1	$\log_{10} 2 = 0.3010$	
2	$\log_{10} 1 = 0$	
3		$3 = (0.4771)^{10}$
4		$32 = 16^{\frac{5}{4}}$
5		$100 = 10^2$
6	$\ln 3.4 = 1.2238$	
7	$\ln 10 = 2.3026$	
8	$\log_3 27 = 3$	
9	$\log_3 81 = 4$	
10		$2^5 = 32$
11		$10^{-2} = 0.01$
12	$\log_6 1 = 0$	
13	$\log_6 0.1 = -1$	
14	$\log_5 25 = 2$	
15		$2^{-2} = \frac{1}{4}$

2) Determine x, y ó b.

1. $\log_b 4 = 2$
2. $\log_b 32 = 5$
3. $\log_{10} x = 3$
4. $\log_{10} x = 0.9030$
5. $\log_{100} x = \frac{1}{2}$
6. $0.01 = 10^y$
7. $x = 7^2$
8. $x = e^2$
9. $64 = 4^y$
10. $e^y = 1096.63$

3) Utilice calculadora para determinar los valores de las expresiones siguientes:

1. e^{1} **2.** $e^{0.5}$ **3.** $e^{5.2}$

4. $20e^{2}$ **5.** e^{3} **6.** 10^{4}

7. 10^{2} **8.** $10^{0.01}$ **9.** $10^{\sqrt{2}}$

10. 10^{3}

4) Liste las propiedades de los logaritmos y dé un ejemplo para cada uno.

5) a. ¿Por qué la base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa?
b. ¿Cúales son las bases más utilizadas?

6) Escriba en términos de log x, log y y log z, cada expresión

1. $\log \dfrac{x^{10}y}{z^{8}}$

2. $\log\ x^{3}y^{4}z^{3}$

3. $\log \dfrac{y^{3}}{z^{1/2}}$

4. $\log\sqrt{\dfrac{x^{4}z}{y}}$

5. $\log \dfrac{\sqrt{x}y}{\sqrt[3]{z}}$

6. $\log\ xyz^{5}$