4 Teoría de Conjuntos

4.1 Definiciones, símbolos y notación

4.1.1 Conjunto

"Al construir una teoría matemática, no es posible definir todos los entes que en ella aparecen y, por tanto, tendremos los llamados *entes no definidos* (de intentar definir todos los entes de una teoría, caeríamos pronto en definiciones circulares); en la teoría de conjuntos introducimos como un ente no definido el *conjunto...*" (Suger, Morales, Pinot; 1971).

De acuerdo con el anterior razonamiento, nos limitaremos a dar la siguiente noción intuitiva: llamamos conjunto a una colección de elementos que tienen una característica común, la cual puede ser claramente enunciada.

Ejemplos:

1) "El conjunto de los números enteros mayores que 2".
2) "El conjunto de los factores primos de 68".
3) "El conjunto de todas las letras de nuestro alfabeto".

El enunciado de la característica de los elementos de un conjunto debe ser tan claro que permita, sin ambigüedad, verificar si un elemento forma parte o no del conjunto.

Se acostumbra referirse a los conjuntos con letras mayúsculas: A, B, C, etc. Así, R representa a los números reales, Z a los enteros y Q a los racionales.

4.1.2 Elemento.

Se llama "elemento" a cada objeto, número, letra, etc., que forma parte de un conjunto.

Ejemplos:

1) 8 es un elemento del conjunto de los números enteros mayores que 2.
2) 17 es un elemento del conjunto de factores primos de 68.
3) j es un elemento del conjunto de letras de nuestro alfabeto.

Es usual referirse a todos los elementos de un conjunto con letras minúsculas como x e y, dándoles carácter de variables. El estudiante recordará que en el álgebra ocurre algo similar, ya que x puede representar a cualquier número en un conjunto.

En ciertas aplicaciones se usan también dichas letras con un subíndice: x_i, y_i, donde "i" toma los valores 1, 2, 3, ...

Ejemplos:

1) Si decimos "x es un número par", se sobreentiende que x puede tomar cualquiera de los valores 2, 4, 6, ...

2) Si un conjunto está formado por los números que $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16},$

podemos decir que $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{8}$, $x_4 = \frac{1}{16}$

4.1.3 Relación de pertenencia.

Cuando un objeto, número, letra, etc., forma parte de un conjunto, se dice que *pertenece* al conjunto.

Usaremos el símbolo $\in$ para indicar dicha pertenencia. Así: $\frac{3}{4} \in Q$ significa que $\frac{3}{4}$ pertenece al conjunto de los números racionales.

Ejemplo:

Sea A el conjunto de los enteros positivos, entonces $-7 \notin A$.

4.1.4 Formas de representación de conjuntos.

Existen dos formas usuales de representar conjuntos: por "*extensión*" o *enumerativa* y por "*comprensión*" o *descriptiva*.

La forma por extensión se usa cuando es posible dar la lista de **todos** los elementos del conjunto, los cuales aparecerán encerrados entre llaves y separados por comas. El orden en que aparezcan los elementos es indiferente. Tampoco debe aparecer un elemento dos o más veces.

Ejemplo: A = { 2, 4, 8, 16 } es un conjunto dado por extensión.

La forma por comprensión se puede utilizar como una alternativa para sustituir a la forma por extensión, pero llega a ser necesaria cuando es imposible dar la lista de todos los elementos del conjunto. Consiste en encerrar entre llaves una o más frases o proposiciones que describen las características de los elementos del conjunto.

Nota: llamamos proposición a cualquier expresión de la cual es posible decir si es verdadera o falsa.

Ejemplos:

1) $A = \{x \mid x = 2^n \;, n = 1,2,3,4\}$. El estudiante debe reconocer que el conjunto aquí descrito no es más que el conjunto A, del ejemplo anterior.

2) $B = \{x \mid x \in R,\; 1 < x < 2\}$. Nótese que este conjunto tiene por elementos a todos los números reales en el intervalo (1,2), y es imposible dar una lista de todos sus elementos.

En estos ejemplos se usó el símbolo |, que se lee *tal que*. Se usa para anunciar que a continuación se darán las características de los elementos del conjunto. Por ello, x | debe interpretarse como "el conjunto de todos los elementos que cumplen con la (s) siguiente (s) condición (es)".

Con un poco de práctica, el estudiante aprenderá que en esta forma de representación de con juntos se sigue una estructura o patrón bien definido:

Nombre del conjunto = {letra que representa a los elementos, anuncio de condición (es), condición (es)}.

Es importante saber leer e interpretar las proposiciones que se encuentran encerradas entre llaves como en los dos ejemplos anteriores. En el primer caso se debe leer así: "A es el conjunto de potencias enteras de 2, donde los exponentes son 1, 2, 3 y 4". En el segundo caso se debe leer así: "B es el conjunto de los números reales comprendidos en el intervalo (1,2)".

Obsérvese que no se dijo "tal que", ni "n", ni "pertenece", ni "menor que". Esto no debería confundir al lector, ya que lo que se busca es enfatizar que, en vez de leer en forma literal los símbolos que forman las proposiciones entre llaves, puede hacerse una lectura interpretativa, que permita comprender y reconocer cuáles elementos forman el conjunto.

4.1.5 Igualdad de conjuntos.

Se dice que dos conjuntos son iguales, si y sólo sí, tienen los mismos elementos.

Después de leer la definición dada, podría pensarse que, si dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos, no son dos, sino un mismo conjunto. Esto haría innecesario hablar de conjuntos iguales.

Sin embargo, para aclarar por qué se necesita tal definición, analice el siguiente ejemplo:

Sean : $A = \{x \mid x \in R,\ x^2 = 1\}$, y $B = \{x \mid x \in R,\ x^4 = 1\}$. Es de hacer notar que ambos conjuntos tienen por elementos los números 1 y -1, a pesar de tener una condición distinta (las expresiones $x^2 = 1$ y $x^4 = 1$ no son idénticas en su estructura).

Con esto queremos dar a entender que existe la posibilidad de que dos conjuntos distintos tengan exactamente los mismos elementos, por lo que lejos de ser el mismo conjunto, sólo son conjuntos *iguales*.

4.1.6 Conjunto Vacío.

Se llama conjunto vacío al conjunto que no tiene elementos, y se representa con el símbolo $\emptyset$.

Al principio puede parecer extraño hablar de un conjunto que no tiene elementos, ya que anteriormente se dijo que un conjunto es una colección de elementos. Sin embargo, considérense las siguientes preguntas:

- ¿Cuàles son los números reales cuyo cuadrado es negativo? La respuesta es: ninguno.
- ¿Qué elementos tienen en común los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{5,6,7\}$? La respuesta es: ninguno.
- ¿Existe un número que sea a la vez menor que 2 y mayor que 5? La respuesta es: no.

Los tres casos anteriores tienen la misma característica: no hay elementos que cumplan lo que se pide. Por lo tanto, si insistimos en representar por medio de un conjunto cada respuesta, nos vemos obligados a usar un conjunto sin elementos: el conjunto vacio.

Al analizar detenidamente los casos recién planteados, observamos que la ausencia de elementos tiene su origen en la imposibilidad de cumplir a la vez dos o más requisitos que son contradictorios: ser número real y tener cuadrado negativo, estar a la vez en dos conjuntos que no tienen elementos comúnes, etc.

El conjunto vacío se usa también en aquellos casos en los cuales una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones, etc. no tienen solución.

4.1.7 Conjunto universo y complemento de un conjunto.

Se llama *conjunto universo*, o *conjunto universal*, al conjunto al cual pertenecen la totalidad de los elementos considerados en una discusión, en la solución de una ecuación, o en cualquier situación que requiera de un contexto bien definido.

El símbolo para representar al conjunto universo es U.

Si uno se pregunta ¿para qué sirve el conjunto universo?, la respuesta es: para dar un contexto a cada problema, definición o situación particular.

Ejemplos:

1) ¿Qué valores de x hacen cero la expresión $x^2 - 4$? Si escogemos como conjunto universo a los números naturales, solamente $x = 2$ cumple con lo solicitado. Sin embargo, si escogemos como universo a los números enteros, 2 y -2, la hacen cero.
2) Para $x^2 - 2$, si escogemos como conjunto universo a los números racionales, ninguno de estos lo anula. No obstante, al tomar como conjunto universo a los números irracionales, encontramos que $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ si la anulan.
3) Si la expresión es $x^2 - x - 2$ y el universo, el intervalo $[1, 5]$, sólo 2 la anula. Si ampliamos el universo a $[-4, 5]$ tenemos dos valores que la hacen cero: 2 y -1.

La lección que obtenemos de los anteriores ejemplos es la siguiente: los valores que anulan cada expresión dependen del conjunto universo que se haya escogido.

Esto es así porque el conjunto universo determina qué tipo de elementos podemos usar, (por esa razón algunos autores le llaman conjunto referencial).

Dependiendo de lo amplio o restringido que sea el universo, así tendremos mayor o menor libertad para saber qué elementos podemos emplear. Por otra parte, el universo no es único; puede escogerse de acuerdo con las circunstancias o las necesidades de quien lo usa.

Para finalizar esta sección definiremos un concepto que tiene mucha relación con el conjunto universo; se trata del *complemento* de un conjunto.

Dado un conjunto A, llamamos complemento de A al conjunto de todos los elementos del universo que no pertenecen a A. Representamos dicho complemento por medio del símbolo A^c.

Ejemplo:
Sean U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} y A = { 0,2,4,6,8}, hallar A^c.
La solución consiste en reunir en un conjunto todos los elementos que pertenecen a U y no pertenecen a A; así A^c = { 1,3,5,7,9}.

4.1.8 Conjuntos finitos y conjuntos infinitos.

Un conjunto es *finito* si es posible contar sus elementos y el proceso de contar finaliza.

Ejemplo:
Sea C = {a,b,c,d,e}. Este es un conjunto finito porque es posible contar sus elementos y dicho proceso finaliza en 5 (C tiene 5 elementos).

Por otra parte, un conjunto es *infinito* si es imposible contar sus elementos o, en caso de ser posible empezar a contarlos, el proceso de contar nunca termina.

Ejemplo:
1) Sea Z^+ = {1,2,3,4,...}, el conjunto de los enteros positivos. En este caso, aunque sí podemos empezar a contar los elementos, nunca finalizaríamos. Esto es así porque después de cada entero hay otro que le sigue.

Nótese que la forma que usamos para representar a Z^+, con los primeros números entre llaves y los puntos suspensivos, no es por extensión, ya que no se incluyen todos los elementos (de hecho, es imposible incluirlos). Tampoco se ajusta completamente a la forma por comprensión pues en ningún momento se utilizó frases o proposiciones entre las llaves. Esta es una forma alternativa en la cual se incluyen algunos de los primeros elementos y los demás quedan sugeridos por los puntos suspensivos.

2) Sea D = {x | x $\in$ R, 2 $\leq$ x $\leq$ 3 }. Este es un ejemplo de conjunto infinito porque, tratándose de los números reales, es imposible contar todos los números racionales e irracionales comprendidos en el intervalo dado. Si el lector no está de acuerdo con lo que aquí se afirma, basta con la siguiente reflexión: si el primer número a contar es 2, ¿cuál le sigue?

Para finalizar esta sección, es importante que el estudiante recuerde que el conjunto de los números reales, R, el cual usará frecuentemente en sus cursos universitarios de matemática, es un conjunto infinito.

4.1.9 Inclusión de conjuntos.

Dado un conjunto A, diremos que el conjunto B está *contenido* en A, o que B es un *subconjunto* de A, si y sólo si, todo elemento de B es también elemento de A.

Para representar que B es un subconjunto de A usaremos la siguiente notación: $B \subset A$ (se lee: "B está contenido en A").

Algunos autores utilizan la palabra *incluido* en vez de *contenido*. En caso de duda, el lector debe interpretar el significado de estos términos, y de otros que pudiera encontrar más adelante, de acuerdo con el contexto específico.

Ejemplo:

Sean $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $B = \{2,4,6\}$. Dado que cada elemento de B es también elemento de A, concluimos que $B \subset A$.

4.1.10 Propiedades de la igualdad y de la contención de conjuntos.

A continuación se da una lista de las principales propiedades de la igualdad y de la contención de conjuntos. Estas propiedades son útiles para simplificar expresiones y para hacer demostraciones.

Propiedades de la igualdad de conjuntos.

a) Para todo conjunto A, $A = A$.
b) Si $A = B$, y $B = C$, entonces $A = C$.

Propiedades de la inclusión de conjuntos.

a) Para todo conjunto A, $A \subset A$
b) Si $A \subset B$, y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.
c) Para todo conjunto A, se cumple que $\varnothing \subset A$. En otras palabras, el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Esta propiedad no es evidente, y es posible demostrar su validez. Sin embargo, tal demostración está más allá de nuestro alcance.

4.2. Operaciones entre dos o más conjuntos

4.2.1 Unión.

Dados dos conjuntos, AyB, definimos su unión como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, a B, o a los dos conjuntos a la vez.

Lo anterior se puede definir por comprensión:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$, donde el símbolo $\cup$ significa unión.

En la expresión anterior, es importante comprender el significado de la disyunción "o". En lenguaje de uso cotidiano se puede interpretar como "y/o".
Por ejemplo, si en un anuncio de empleo se dice que el candidato debe ser Arquitecto y/o Ingeniero, puede acceder al puesto alguien que posea los dos títulos a la vez.

Ejemplo:
Representar gráficamente $A \cup B$, si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,5,6\}$.

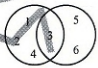
$\mathbf{A \cup B} =$ 

Figura 1

El tipo de gráfica que se utilizó en el ejemplo anterior se denomina diagrama de Venn. Seguramente el estudiante está familiarizado con este tipo de representación gráfica de operaciones entre conjuntos.

Note que el diagrama consta de tres regiones bien definidas; aquella donde están los elementos que sólo pertenecen al conjunto A, otra donde están los elementos comunes, y otra en donde aparecen los elementos que sólo pertenecen al conjunto B.

Debe tenerse en cuenta que los elementos comunes no se escriben más que una vez.

4.2.2 Intersección.

Dados dos conjuntos, A y B, definimos su intersección como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez.

Lo anterior se puede definir por comprensión:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$, donde el símbolo $\cap$ significa *intersección.*

En esta expresión juega un papel muy importante la conjunción "y". Su uso es el mismo que se le da en el lenguaje cotidiano. Si decimos "hoy es viernes y está lloviendo", significa que se cumplen ambas condiciones a la vez.

Ejemplo:
Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,5,6\}$, entonces $A \cap B = \{3\}$.

Obsérvese que el resultado de la operación se reduce a un conjunto que tiene sólo un elemento, ya que no hay más elementos que pertenezcan a la vez a los dos conjuntos, A y B.

4.2.3 Diferencia.

Dados dos conjuntos, A y B, definimos la *diferencia* A-B como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B.

Lo anterior se puede definir por comprensión:

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \not\subset B\}$, donde el símbolo - significa diferencia.

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,5,6\}$, entonces $A - B = \{1,2,4\}$.

También es posible definir la diferencia B - A. En este conjunto están los elementos que pertenecen al conjunto B y no pertenecen al conjunto A.

Ejemplo:
Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,5,6\}$, entonces $B - A = \{5,6\}$.

4.2.4 Propiedades de las operaciones entre conjuntos.

La lista siguiente contiene algunas de las más importantes propiedades de las operaciones entre conjuntos.

Si A, B y C son conjuntos cualesquiera, $\varnothing$ es el conjunto vacío y U el universo:

a) $A \cup A = A$
b) $\varnothing \cup A = A$
c) $A \cup U = U$
d) $A \cup B = B \cup A$
e) $A \cup A^c = U$
f) $A \cap A = A$
g) $\varnothing \cap A = \varnothing$
h) $A \cap U = A$
i) $A \cap B = B \cap A$
j) $A \cap A^c = \varnothing$
k) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
l) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
m) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
n) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
o) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
p) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Sugerencia: Se recomienda que utilice Diagramas de Venn para verificar alguna de estas propiedades.

EJERCICIOS

1) ¿Cuáles de los siguientes números no pertenecen al conjunto de los números racionales?

$-2,\ \frac{1}{5},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \pi,\ \frac{15}{17},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Exprese por extensión el conjunto $A = \{x \mid x \in Z, 5 \leq x < 10\}$

3) Exprese por comprensión el conjunto $B = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$

4) Diga si son iguales o no los conjuntos:
$C = \{ x \mid x \in Z, |x| \text{ es } 4\}$,
$D = \{ x \mid x \in Z, x^2 + 8x + 16 \text{ es igual a } 0\}$

5) ¿Cuáles son los valores de x que hacen cero la expresión $x^2 + 1$, si toma el conjunto R como universo?

6) Diga si es finito o infinito el conjunto de puntos de una recta.

7) El conjunto de los números primos, ¿es finito o infinito?

8) Dados los conjuntos:
$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $A = \{1,3,4,5\}$; $B = \{4,5,6,7,8\}$;
$C = \{2,4,6,8\}$ $D = \{1\}$.

Encuentre:

a) A^C
b) $(A - B) \cup C$
c) $A \cap B$
d) $A^C - B^C$
e) $A \cap (B \cup C)$
f) $C - C$
g) $(A \cap B) \cap C$
h) $D \cap B$
i) $B \cup C$, $A \cup B \cup C$
j) $A \cup U$
k) $A \cap A^C$
l) $\varnothing^C$

5 Geometría

5.1 GEOMETRIA PLANA

5.1.1 Ángulo

Llamamos así a la figura formada por dos rayos (o semirectas) que tienen un punto extremo común. Los dos rayos se llaman *lados* del ángulo. El punto extremo común se llama *vértice* del ángulo.

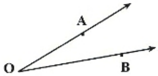


Figura 1

En el ángulo que nos muestra la figura 1, los lados son OA y OB. El vértice es el punto O.

Los ángulos se nombran usualmente en cualquiera de tres formas:

a) Por medio de tres letras mayúsculas, dejando en el centro a la que identifica al vértice: $\angle AOB$

b) Mediante una sola letra mayúscula en el vértice, como $\angle O$.

c) Por medio de una sola letra minúscula en el interior del ángulo. En el estudio de la Trigonometría se acostumbra usar una letra del alfabeto griego: α, β, θ, φ etc., pero se puede utilizar a, b, c, etc.

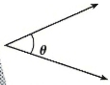
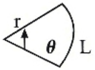


Figura 2

5.1.2 Grados sexagesimales y radianes

En el sistema sexagesimal de medida de angulos, un circulo se divideen 360"arcos" iguales. El ángulo central de cada uno de esos arcos se define como 1 grado (sexagesimal). El tamaño relativo de 1 grado puede observarse en los intrumentos de dibujo llamados transportadores.

En la siguiente figura se muestra un *"arco"* de circunferencia y sus tres elementos:



L: longitud

r: radio

θ: ángulo central

Figura 3

De la definición de "grado sexagesimal" se deduce que el ángulo central correspondiente a un circulo mide 360°. A medio círculo le corresponde un ángulo central de 180°, a un cuarto de círculo le corresponde un ángulo central de 90°, y así, a cada fracción de círculo se le hace corresponder un ángulo en forma directamente proporcional a dicha fracción. Ver la figura.

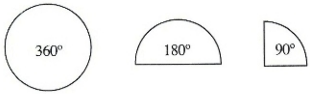


Figura 4

Es conveniente saber que un grado sexagesimal se divide en 60 minutos. Un minuto se divide en 60 segundos y un segundo se divide en 100 centésimas.

Otro sistema muy usado para medir ángulos tiene como unidad el **"radián"**. Dicha unidad se define como el ángulo central de un arco de circunferencia cuya *longitud de arco* tiene la misma medida que su radio.

Observe la figura.

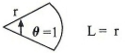


Figura 5

Como veremos, la unidad llamada radián no se puede expresar en grados sexagesimales por medio de un número racional. Se debe usar un número irracional.

Antes de establecer a cuántos grados sexagesimales corresponde 1 radián, es necesario conocer la siguiente definición: para todo arco de circunferencia, si L es la longitud del arco y r es el radio, la medida del ángulo central $\boldsymbol{\theta}$, en radianes,

viene dada por la relación: $\theta = \dfrac{L}{r}$

A partir de esta definición se puede concluir que, en un sentido formal el ángulo dado por $\frac{L}{r}$ no tiene unidades de medida, ya que es el cociente de dos longitudes. El resultado, θ es un número real. Así, bastaría decir, por ejemplo, "el ángulo central de este arco mide 2". Pero cotidianamente acostumbramos decir "2 radianes", porque encontramos más clara esta frase. Sin embargo, al realizar operaciones con la medida de dicho ángulo nos limitaremos a usar el 2 y prescindiremos de la palabra "radianes", la cuál por ningún motivo debemos incluir en la simplificación de unidades o en los cálculos.

Otra conclusión que se obtiene de la expresión $\theta = \frac{L}{r}$ es que a un círculo de radio r le corresponde un ángulo central 2π (a manera de ejercicio, compruébese que esta afirmación es correcta).

Ahora disponemos de una forma sencilla de transformar medidas angulares de grados sexagesimales a radianes, y viceversa: 2π radianes corresponden a 360°, π radianes corresponden a 180°, etc.

Además, 1 radián equivale a $\frac{180°}{\pi}$. El estudiante debe ser capaz de probar que esto es cierto, y también debe mostrar que el resultado es aproximadamente 57.3°.

Las calculadoras científicas tienen incorporadas las funciones que permiten operar con ángulos, pero se debe tomar la precaución de observar el "modo" en que operan. Algunas tienen varios modos angulares, y los de mayor interés son DEG (cuando se quiere operar con grados sexagesimales) y RAD (cuando se quiere operar con radianes). Consulte el manual de su calculadora para conocer otras funciones relacionadas con el ingreso de medidas angulares y su expresión en grados, minutos y segundos.

Aquellos estudiantes que tomarán cursos de Cálculo Diferencial e Integral deben estar preparados para operar con radianes, ya que esa es la unidad de medida angular de uso frecuente en dichas materias. La razón para ello es la siguiente: las definiciones de las derivadas de las funciones trigonométricas se obtienen pensando en que los ángulos se miden en radianes, o sea que $\theta \in R$, de ahí que tal unidad de medida se convierta en una necesidad.

5.1.3 Tipos de ángulos

A continuación aparece una lista de diferentes tipos de ángulos, clasificados de acuerdo con distintos criterios. En algunos casos el criterio es la medida del ángulo, y en otros es la relación del ángulo con otros ángulos o elementos de alguna figura.

a) Ángulo agudo: es aquel cuya medida está comprendida entre 0° y 90°.

b) Ángulo recto: es aquel que mide exactamente 90°, o sea $\frac{\pi}{2}$

c) Ángulo obtuso u oblicuo: su medida está entre 90° y 180°.

d) Ángulo llano: mide exactamente 180°, o sea π.

e) Ángulos complementarios: son dos ángulos cuyas medidas suman 90°.

f) Ángulos suplementarios: dos ángulos cuyas medidas suman 180°.

g) Ángulos congruentes: son aquellos que tienen la misma medida. Usaremos el símbolo $\cong$ para indicar que dos ángulos son congruentes, por ejemplo:
$\angle A \cong \angle B$.

h) Ángulos adyacentes: son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común entre ellos.

i) Ángulos internos de un polígono: son aquellos formados por dos lados adyacentes de un polígono, en el interior de éste. Si el polígono tiene n lados, entonces se forman n ángulos internos.

5.1.4 Ángulos opuestos por el vértice

Son dos ángulos no adyacentes formados por la intersección de dos rectas. En la siguiente figura se puede observar que se forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Se deja como ejercicio mostrar que $\angle a = \angle b$, y que $\angle c = \angle d$.

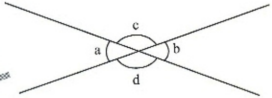


Figura 6

Este tipo de ángulos es muy importante porque se presenta con bastante frecuencia en cursos como Física y Cálculo, además de ser de mucha utilidad en demostraciones geométricas, como lo veremos en el siguiente tema.

5.1.5 Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante que las corta

Por definición, dos rectas en un plano son paralelas sí, y solo sí, no se intersectan. Cuando queremos denotar que dos rectas L_1, y L_2, son paralelas usamos el símbolo $\|$, y escribimos $L_1 \parallel L_2$.

Se llama secante a una recta que intersecta, no perpendicularmente, a dos o más rectas paralelas. Ver la siguiente figura:

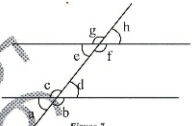


Figura 7

Al observar esta figura podemos notar que se forman ocho ángulos, entre los cuales hay cuatro pares de ángulos opuestos por el vértice. El estudiante debe verificar que esta afirmación es correcta.

Además, los ángulos a y h, así como los ángulos b y g, se dice que son alternos externos, mientras que los ángulos c y f, asi como d y e, se dice que son alternos internos.

En conclusión: cuando dos rectas están en un mismo plano, son paralelas, y las corta una secante, se forman ángulos externos alternos congruentes entre sí y ángulos internos alternos congruentes entre sí. Se deja como ejercicio para el estudiante la demostración de lo afirmado en el párrafo anterior.

5.1.6 Tipos de triángulos

Dados tres puntos en un plano, que no están todos sobre una misma línea recta, si los unimos de dos en dos por medio de tres segmentos de recta, se forma una figura plana llamada triángulo.

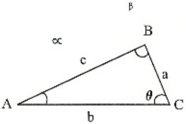


Figura 8

Como resultado de su construcción, un triángulo tiene los siguientes elementos: tres lados, tres vértices y tres ángulos interiores o internos.

Se acostumbra nombrar los vértices con letras mayúsculas; el lado opuesto a cada vértice se nombra con la misma letra que se usó para éste, pero minúscula, y los ángulos internos pueden ser nombrados con letras griegas.

El símbolo para el triángulo es $\triangle$, el cual se antepone a las letras que identifican a los tres vértices. Por ejemplo: $\triangle$ ABC, en el caso de la figura 8.

La siguiente propiedad es de uso frecuente, por lo que se recomienda memorizarla: la suma de las medidas de los ángulos internos en un triángulo (en un plano) es de 180°.

Se pide al estudiante que lleve a cabo la demostración de la propiedad enunciada en el párrafo anterior, pues constituye un excelente ejercicio deductivo basado en propiedades expuestas anteriormente en este tema.

Los triángulos se pueden clasificar, principalmente, por la medida de uno o más de sus ángulos internos o por las medidas de sus lados. A continuación aparece una lista de los principales tipos de triángulos, clasificados de acuerdo con los cirterios mencionados:

a) Triángulo rectángulo: uno de sus ángulos internos mide 90°. Su lado mayor se llama hipotenusa, y los otros dos lados se llaman catetos.
b) Triángulo obtusángulo u oblicuángulo: la medida de uno de sus ángulos internos está entre 90° y 180°.
c) Triángulo acutángulo: sus tres ángulos internos son agudos.
d) Triángulo equiángulo: sus tres ángulos internos son congruentes entre sí
e) Triángulo equilátero: sus tres lados tienen la misma longitud.
f) Triángulo isósceles: tiene dos lados de igual longitud.
g) Triángulo escaleno: sus tres lados tienen distintas longitudes.

Nota: todo triángulo equilátero también es equiángulo

Un importante elemento de todo triángulo, además de los antes mencionados, es la altura (h). Aunque es frecuente hablar de ella en singular, en realidad cada triángulo tiene tres alturas, una por cada lado.

La altura correspondiente a un lado (*o base*) se define así: es el segmento de recta que, partiendo de un vértice, intersecta al lado opuesto, o a la prolongación de éste, formando un ángulo recto. Véase la siguiente figura:

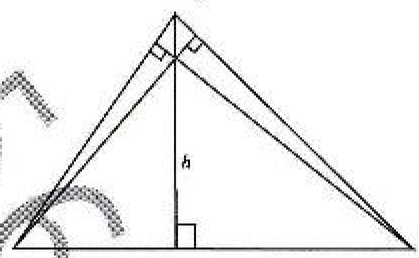


Figura 9

En la figura anterior todas las alturas se situaban en el interior del triángulo. Sin embargo, en el caso de los triángulos obtusángulos es necesario prolongar dos de los lados para representar las correspondientes alturas, como se puede observar a continuación:

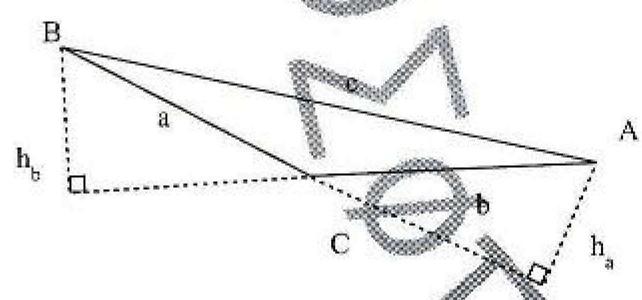


Figura 10

5.1.7 Criterios de semejanza de triángulos

En numerosos cursos, especialmente de las áreas de física y matemática, es frecuente encontrar cierto tipo de problemas cuya solución se basa en relacionar entre sí los elementos de dos o más triángulos.

Para tener éxito en la solución de dichos problemas es necesario conocer y comprender el concepto de **triángulos semejantes**, y memorizar los llamados **criterios de semejanza.**

Definición: se dice que dos triángulos son semejantes sí existe una correspondencia de sus vértices para la cual los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. Vea la siguiente figura:

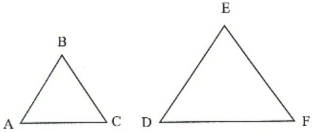


Figura 11

El símbolo para semejanza es $\sim$. Así, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ significa que el triángulo con vértices A, B y C es semejante al triángulo con vértices D, E y F.

De la anterior definición, y con base en la figura 11, se concluye que:

a) A cada ángulo en $\triangle ABC$ corresponde un ángulo congruente en $\triangle DEF$.

b) Se cumplen las siguientes relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Debe quedar claro que el lado AB <u>corresponde</u> al lado DE, AC a DF y BC a EF.

Las conclusiones recién expuestas resumen en términos matemáticos lo que la experiencia visual nos dice acerca de dos triángulos semejantes: uno de ellos se obtiene como si fuera una ampliación fotográfica del otro, manteniendo la proporción entre los lados y sin transformar los ángulos interiores.

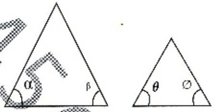
Contando la congruencia de los ángulos y la proporcionalidad entre los lados, la semejanza de dos triángulos conlleva seis condiciones que deben cumplirse.

Sin embargo, para asegurar que dos triángulos son semejantes no es necesario probar que se cumplen las seis condiciones, ya que al cumplirse algunas, se asegura que se cumplen las demás. Para ello basta aplicar uno de los siguientes ***criterios de semejanza de triángulos***.

Nota: de aquí en adelante, escribiremos "ángulo" y "ángulos", en vez de "ángulo interno" y de "ángulos internos", respectivamente.

Dos triángulos son semejantes si:

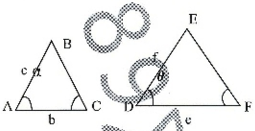
a) Son congruentes dos de sus ángulos correspondientes (este es el criterio "ángulo ángulo" que se abrevia AA). Vea la figura:



$$\angle \alpha \cong \angle \theta$$
$$\angle \beta \cong \angle \varnothing$$

Figura 12

b) Tienen dos lados proporcionales, y es congruente el ángulo comprendido entre dichos lados (este es el criterio "lado ángulo lado que se abrevia LAL). Ver la figura.

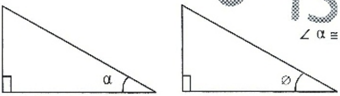


$$\frac{c}{f} = \frac{b}{e}$$
$$\angle \alpha \cong \angle \theta$$

Figura 13

c) Sus lados correspondientes son proporcionales. Vea la expresión del inciso "b", sobre triángulos semejantes.

d) Ambos triángulos son rectángulos y es congruente uno de sus ángulos agudos. Ver la figura.



$$\angle \alpha \cong \angle \varnothing$$

Figura 14

5.1.8 Tipos de cuadriláteros

Dados cuatro puntos en un plano, de manera que no haya tres de ellos sobre una misma recta, si se unen de dos en dos por cuatro segmentos de recta, se forma una figura plana llamada *cuadrilátero*. Vea la figura.

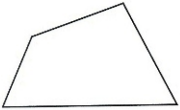


Figura 15

Los cuatros puntos dados se llaman *vértices*, y los cuatro segmentos de recta se denominan *lados*. Puede observarse que un cuadrilátero tiene cuatro ángulos interiores (a los cuales llamaremos simplemente "ángulos").

Un interesante y no complicado ejercicio consiste en demostrar que la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es 360°. Se invita al estudiante a descubrir por sus propios medios cómo hacer dicha demostración, para poner en práctica los conocimientos adquiridos hasta el momento.

Las siguientes definiciones serán útiles más adelante:

- Son *lados opuestos* de un cuadrilátero dos lados que no se intersectan.
- Son *lados consecutivos* de un cuadrilátero dos lados que tienen un punto extremo común.
- Son *ángulos opuestos* de un cuadrilátero dos ángulos que no tienen un lado común.
- Son *ángulos consecutivos* de un cuadrilátero dos ángulos que tienen un lado común.
- *Vértices consecutivos* de un cuadrilátero son los puntos extremos de un lado.
- Una *diagonal* de un cuadrilátero es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

A continuación se presenta una clasificación de los principales tipos de cuadriláteros, con el ejemplo respectivo. La clasificación se hace a partir de las longitudes de sus lados, las medidas de sus ángulos o combinaciones de ambas características.

a) Trapecio: cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y dos no paralelos.

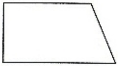


Figura 16

b) Trapecio Isósceles: trapecio cuyos lados no paralelos tienen la misma longitud.

Figura 17

c) Paralelogramo: cuadrilátero que tiene paralelos sus lados opuestos.

Figura 18

d) Rombo: es un paralelogramo cuyos cuatro lados tienen la misma medida (equilátero).

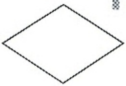


Figura 19

e) Rectángulo: paralelogramo cuyos ángulos son rectos.

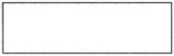


Figura 20

f) Cuadrado: rectángulo con todo sus lados de la misma longitud.

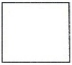


Figura 21

Al analizar las anteriores definiciones se observa que los cuadriláteros que nos interesan pertenecen a uno de dos grupos: trapecios y paralelogramos, los cuales se caracterizan por tener al menos una pareja de lados paralelos.

Aprovechando la característica mencionada, podemos definir la altura de un trapecio o de un paralelogramos así: es la distancia entre dos de los lados paralelos. Véase la figura.

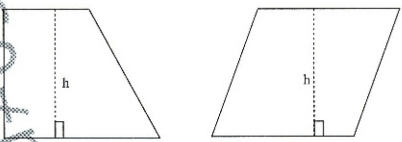


Figura 22

Es importante mencionar que los trapecios sólo pueden tener una altura, mientras que los paralelogramas pueden tener dos (por supuesto, el cuadrado tiene dos alturas con la misma medida).

A los lados paralelos que se usan para definir la altura de uno de dichos cuadriláteros se les llama bases. Cuando son de longitudes distintas, como en el trapecio, uno se nombra "base menor" y el otro "base mayor"

5.1.9 Cálculo del perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y el círculo.

Mientras el perímetro, P, de una figura plana es la medida de la longitud de su contorno, el área, A, es una medida de la superficie interior, o "encerrada" por dicho contorno. Vea la figura:

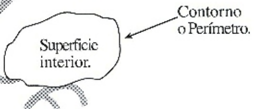


Figura 23

Como el perímetro es una longitud, para cuantificarlo se utilizan medidas tales como centímetros, pulgadas, metros, etc.

Podría pensarse que medir el perímetro equivale a cuantificar la distancia que debe recorrer un lápiz para trazarlo completo:

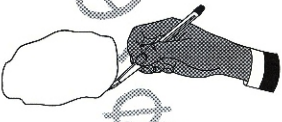


Figura 24

Por otra parte, para cuantificar la superficie de una figura plana se utilizan medidas tales como centímetros cuadrados, pulgadas cuadradas, metros cuadrados, etc.

En este punto podría formularse la pregunta ¿por qué al medir áreas utilizamos unidades de longitud elevadas al cuadrado? Una respuesta aceptable surge de la siguiente explicación: el área de figuras planas se calcula por medio de la multiplicación de dos longitudes, o al elevar al cuadrado una longitud, como se verá más adelante. Así, al aplicar las leyes de los exponentes a las unidades de medida tenemos que:

$$\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2,\ \text{pulg} \times \text{pulg} = \text{pulg}^2,\ \text{etc.}$$

Para adquirir una noción concreta del significado de la medición del área de una figura plana, tómese como punto de partida la siguiente figura:

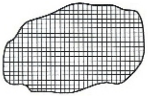


Figura 25

Supóngase que se ha cuadriculado la superficie interior de la figura, y que cada cuadradito mide $1 mm^2$. Así, la medida del área en cuestión vendría dada por el total de milímetros cuadrados allí contenidos.

Aunque el procedimiento propuesto parece simple porque sugiere un **conteo** de cuadraditos, salta a la vista que en las proximidades del contorno hay algunos de éstos que pierden su forma y tienen lados curvilíneos, lo cual impide "contarlos" como se hizo con los demás. En este caso se debe usar un procedimiento matemático relacionado con sumas de áreas.

Ahora bien, el cálculo de dichas sumas está más allá de los objetivos de este curso. El estudiante seguramente se encontrará con este mismo problema y su solución exacta en cursos avanzados de matemática.

Mientras tanto, es importante resaltar que las fórmulas y procedimientos para calcular áreas, que expondremos a continuación, dan resultados exactos, puesto que han sido diseñadas con toda generalidad y toman en cuenta las dificultades que surgen en las proximidades de los contornos curvilíneos.

Fórmulas para el cálculo del perímetro y el área de algunos figuras planas:

- **Perímetro de un triángulo:**
  Si, L1, L2 y L3 son las longitudes de los tres lados, el perímetro P está dado por.

$$P = L1, + L2, + L3$$

Si el triángulo es equilátero se tiene que $P = 3L$

- Perímetro de un rectángulo:

  Si L1 es la longitud de dos de los lados iguales, y L2 es la longitud de los otros dos lados.

$$P = 2L1 + 2L2 = 2(L1 + L2)$$

- Perímetro de un cuadrado:

  Si L es la longitud de cada lado del cuadrado

$$P = 4L$$

- Circunferencia de un círculo:

  Si el radio tiene longitud r; entonces

$$P = 2\pi r$$

Donde π es el símbolo que representa al número Pi (3.141592654...)

- Área de un triángulo:

  Si b es la longitud del lado conocido (al cual generalmente se le llama "base", y h es la altura respectiva), entonces el área A del triángulo es

$$A = \frac{1}{2} bh$$

- Área de un trapecio:

  Si b y B representan las longitudes de los lados paralelos del trapecio y h la altura correspondiente,

$$A = \frac{1}{2}(b + B)\,h.$$

- Área de un paralelogramo:

  Cuando uno de sus lados, o base, tiene longitud b, y la altura correspondiente es h:

$$A = bh$$

- **Área de un rectángulo:**
  Si dos de sus lados opuestos miden L1 cada uno, y los otros dos lados miden L2 cada uno, entonces:

$$A= L1L2$$

En algunos textos se define el área de un rectángulo como " base por altura", lo cual es correcto, y coincide con la fórmula del área de un paralelogramo. Se pide al estudiante que investigue por qué la misma fórmula puede utilizarse para calcular el área de ambas figuras.

- **Área de un cuadrado:**
  Cuando los lados tienen longitud L:

$$A= L^2$$

- **Área de un círculo:**
  Cuando el radio tiene longitud r:

$$A= \pi r^2$$

5.1.10 El Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.

Se llama *teorema* a una propiedad que puede ser demostrada. El teorema que expondremos a continuación fue conocido en varias culturas antiguas, aunque históricamente quedó asociado al nombre del filósofo y matemático griego Pitágoras (siglo V, A.C.), por ser él quien primero lo demostró.

En un triángulo rectángulo el lado que se opone al ángulo recto se llama *hipotenusa* y los otros lados reciben el nombre de *catetos*. Con estos conceptos se enuncian el resultado siguiente:

Teorema de Pitágoras: *"en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa".*

Vea la siguiente figura:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

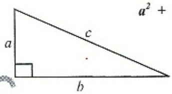


Figura 26

La expresión $a^2 + b^2 = c^2$ resume el enunciado del teorema y permite aplicarlo en situaciones prácticas, como veremos más adelante.

Para comprender con claridad lo que dice el teorema, usando un caso particular, se construyen tres cuadrados y se muestra que la suma de las áreas de los cuadrados menores equivale al área del cuadrado mayor. Ver la figura siguiente.

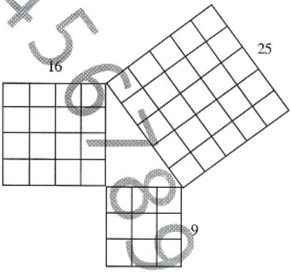


Figura 27

Las aplicaciones más inmediatas del teorema de Pitágoras son:

a) Dados los dos cateros con longitudes *a y b*, hallar la longitud de la hipotenusa, *c*:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

b) Dados un cateto y la hipotenusa, de longitudes *a y c*, respectivamente, hallar la longitud del otro cateto, b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Los estudiantes deben tener presente que el teorema de Pitágoras se cumple únicamente cuando un triángulo es rectángulo. Por tal razón se les recomienda ser prudentes al aplicarlo, ya que antes deben cerciorarse de que están trabajando con un triángulo rectángulo.

Sin embargo, si no se sabe de qué tipo es un triángulo, pero resulta que $a^2 + b^2 = c^2$, siendo *a* y *b* las longitudes de los lados menores, y c la longitud del lado mayor, se puede concluir sin duda alguna que el triángulo en cuestión es rectángulo, y que los lados de longitudes *a* y *b* forman entre sí un ángulo de 90°.

Este hecho puede utilizarse para hacer demostraciones geométricas de perpendicularidad de segmentos rectilíneos, tal como se verá en los ejercicios propuestos al final de esta unidad.

Nota: dos segmentos de recta son perpendiculares entre sí, cuando al cruzarse forman un ángulo recto (90°).

EJERCICIOS

1. Encuentre el equivalente en radianes de las siguientes medidas angulares. 1°, 30°,45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 210°, 240°. Deben expresar sus respuestas en términos de π , sin usar cifras decimales:

2. Encuentre el equivalente en grados sexagesimales de las siguientes medidas angulares que vienen expresadas en radianes:

   $\pi/12$, $5\pi/9$, $5\pi/4$, $11\pi/6$, $11\pi/3$.

3. El radio de un arco de circunferencia mide 2 unidades de longitud, y el ángulo central mide 4 radianes. Calcule la longitud de arco correspondiente .

4. Suponga que la Tierera es una esfera de radio 6370 km. Calcule la distancia que recorre, en un día, debido al movimiento de rotación de la Tierra sobre su eje, un punto situado en el ecuador.

5. Un ángulo mide 28°. ¿Cuánto mide su ángulo complementario?

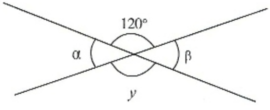
6. Un ángulo mide 86°. ¿Cuánto mide su ángulo suplementario?

7. En la lista siguiente, determine si c ada una de las medidas angulares dadas corresponde a un ángulo agudo, recto u obtuso:

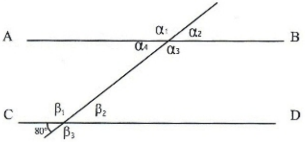
   126°, 32°, $\pi/5$, $3\pi/4$, $11\pi/12$, $\pi/2$.

8. En la lista siguiente, encuentre cuáles medidas corresponden a ángulos congruentes entre sí (hay tres pares): 150°, $11\pi/6$, 210°, $5\pi/6$, $7\pi/6$, 330°.

9. En la siguiente figura, encuentre las medidas de $\angle\alpha$, $\angle\beta$, $\angle y$.

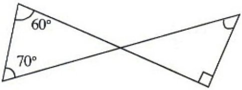


10. En la siguiente figura, encuentre las medidas de $\angle\beta_1$, $\angle\beta_2$, $\angle\beta_3$, $\angle\alpha_1$, $\angle\alpha_2$, $\angle\alpha_3$, $\angle\alpha_4$.

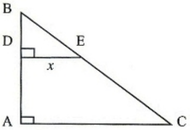


AB || CD

11. Encuentre la medida de $\angle\alpha$:

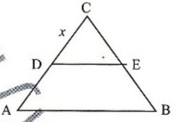


12. Utilice semejanza de triángulos para hallar el valor de x:



AB = 6
AC = 8
DB = 2

13. Utilice semejanza de triángulos para hallar el valor de x:

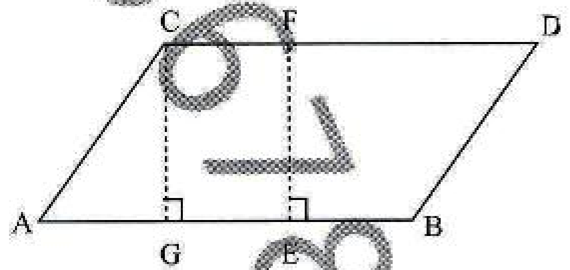


DE || AB
AC = 3
AB = 4
DE = 2

14. Calcule el perímetro y el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden 2 unidades de longitud.

15. Calcule el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyos lados paralelos miden 4 unidades y 10 unidades, y cuya altura mide 4 unidades.

16. Calcule el perímetro y el área del paralelogramo de la figura:



$AB = 10$

$EF = 4$

$AG = 3$

17. Un poste de alumbrado público, vertical, mide 8 metros de altura desde su base. Un cable tensor, de 10 metros de longitud, se extiende desde la punta del poste hasta un punto en el suelo. ¿Cuál es la distancia entre este punto y el centro de la base del poste?

5.1 Geometría Sólida

La Geometría Sólida es el estudio de los cuerpos geométricos. Un cuerpo geométrico es aquel que ocupa un lugar en el espacio, por lo que tienen 3 dimensiones: largo, ancho y alto. Dentro del conjunto de los cuerpos geométricos encontramos 2 subconjuntos: *cuerpos poliedros y cuerpos redondos*.

Los cuerpos poliedros son aquellos en los que todas las superficies que lo limitan son planas. Por ejemplo: una caja de medicinas es un cuerpo poliedro.

Los cuerpos redondos son aquellos que tienen, al menos una de sus superficies de forma curva. Por ejemplo un pocillo de café es un cuerpo redondo.

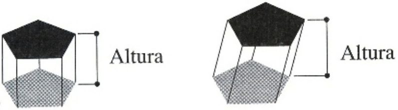
5.2.1 Cuerpos poliedros.

En los cuerpos poliedros reconocemos algunos elementos importantes. Las superficies que limitan un poliedro se llaman *caras*, las intersecciones de las caras se llaman *aristas* y los puntos donde estas se cortan se llaman *vértices*. Se denomina *diagonal* de un poliedro al segmento que une dos vértices que no pertenezcan a la misma cara.

Dentro de los cuerpos poliedros, llamados simplemente poliedros, reconocemos dos grupos: los prismas y las pirámides.

5.2.1.1 Prismas

Se llama *prisma* a un poliedro formado por dos caras poligonales de cualquier número de lados, paralelas e iguales llamadas *bases*, y por tantos paralelogramos como lados tenga la base. Estas últimas son llamadas *caras laterales*. La distancia entre las bases se llama *altura del prisma*.



Un prisma se llama regular, si sus caras laterales son rectángulos. En este caso la altura del prisma es la altura de las caras laterales.

El área lateral se calcula como el producto de su altura y el perímetro de la base.

Área lateral = perímetro de la base.altura del prisma

Para calcular su área total se emplea la siguiente fórmula:

Área total = área lateral + 2.área de la base

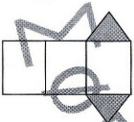
Para calcular el volumen:

Volumen del prisma = área de la base . altura

A continuación están dibujados los prismas triangular, cuadrangular y hexagonal, y el desarrollo de cada uno de ellos.

Prisma triangular: Es un prisma que tiene como base triángulos equiláteros.

Desarrollo:

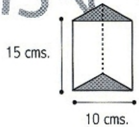


Ejemplos:

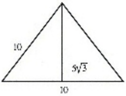
1. Encuentra el área total del prisma triangular, cuyas bases son triángulos equiláteros de 10 cms. por lado y cuya cara lateral tiene una altura de 15 cms.

Aplicando las fómulas anteriores

Área lateral = $[3(10)](15) = 450$ cms^2



En un triángulo equilátero de 10 cms. por lado, la altura mide $5\sqrt{3}$ cms.



Por tanto,

Área de la base $= \dfrac{10\ (5\sqrt{3})}{2} = 25\ \sqrt{3} \approx 43.3$ **cms^2**

Área total $= 450 + 2(43.3) = 536.6$ **cms^2**

El área total es aproximadamente de 536.6 **cms^2**

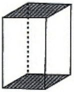
2) Utilizando la fórmula adecuada encuentre el volumen del prisma triangular que tiene como base un triángulo equilátero de 6 cms. por lado y cuyas caras laterales tienen una altura de 10 cms.

Área de la base 36/4 $\sqrt{3} \quad = 9\sqrt{3}$ **cms^2**

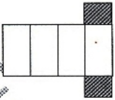
Volúmen $(9\sqrt{3})\ (10) = 90\ \sqrt{3} \approx 155.880$ **cms^3**

El volúmen es aproximadamente 155.9 **cms^3**

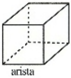
Prisma cuadrangular: Es un prisma que tiene como base cuadrados.



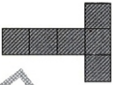
Desarrollo:



Un caso especial del prisma cuadrangular es el cubo, que es un sólido limitado por seis cuadrados iguales, también se le conoce con el nombre de *Hexaedro*.



Desarrollo:



Para calcular su área lateral se emplea la siguiente fórmula:

Área lateral = 4.arista elevada al cuadrado

Para calcular su área total se emplea la siguiente fórmula:

Área total = 6. arista elvada al cuadrado

Para calcular su volumen se emplea la siguiente fórmula:

Volumen del cubo = arista elevada al cubo

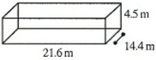
Ejemplo:
Hallar el área total y el volumen de un cubo con cada arista de 20 cm.

$$\text{Área total} = 6(20)^2 = 2400 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = (20)^3 = 8000 \text{ cm}^3$$

Utilizando los resultados para el cálculo del área y volumen de un prisma puede trabajarse el siguiente problema.

Ejemplo
Una bodega tiene un piso rectangular de 21.6 metros por 14.4 metros. Las paredes son verticales y tienen 4.5 metros de altura. Hallar el área total de paredes, piso y techo y la capacidad de almacenaje de la bodega (volumen).



La superficie total se encuentra sumando las áreas de paredes, piso y techo.

$$\text{Área total} = 2(21.6)(4.5) + 2\,(14.4)(4.5) + 2\,(14.4)(21.6)$$
$$= 964.08\ m^2$$

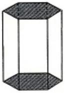
El área total de la bodega es de $964.08\ m^2$

La capacidad de almacenaje, que corresponde al volumen, se encuentra multiplicando el área de la base por la altura.

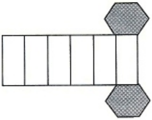
$$\text{Volumen} = (21.6)(14.4)(4.5)$$
$$= 1{,}399.68\ m^3$$

La capacidad de almacenaje es de $1{,}399.68\ m^3$

Prisma hexagonal: Es un prisma que tiene como base hexágonos.

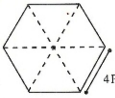


Desarrollo:



Ejemplo:
Encuentre el área total del prisma hexagonal regular con una altura de 8 pulgadas y cuyas bases son hexágonos regulares de 4 pulgadas por lado.

La base del prisma se represnta en la figura:



Por tanto,
Área Lateral $= [6(4)](8) = 192$ pulg^2

Note que este hexágono se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de lado 4, por lo que se deduce que el área de la base es 6 veces el área de uno de estos triángulos, de base 4 y altura $2\sqrt{3}$

Así ,

$$\text{Área de base} = 6\left[\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})\right] = 6(4\sqrt{3}) \approx 41.57 \text{ pulg}^2$$

Área total $= 192 + 2(41.57) \approx 275.0$ pulg^2

El área total es aproximadamente 275.0 pulgadas cuadradas.

5.2.1.2 Pirámides

Se llama *pirámide* a un poliedro que tiene por base un polígono de cualquier número de lados y cuyas caras laterales son triángulos que se encuentran en un punto llamado *vértice de la pirámide.* La distancia entre el vértice y la base, que es el segmento de perpendicular trazada desde el vértice a la base, se llama *altura de la pirámide.*

Para calcular su volumen se emplea la siguiente fórmula:

Volumen de la piramide = (área de la base . altura) /3

Pirámide regular es un sólido que tiene por base un polígono regular y cuyas caras son triángulos isósceles iguales.

En una pirámide regular, se llama *apotema* a la altura de cualquiera de sus caras laterales.

El área lateral de una pirámide es igual a la suma de las área de sus caras laterales.

Por tanto,
Para calcular su área lateral se emplea la siguiente fórmula:

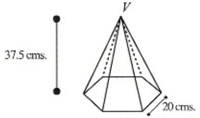
Área lateral = (perímetro de la base.apotema) /2

Para calcular su área total:

Área total = área lateral + área de la base

Ejemplo:

Una pirámide regular tiene como base un hexágono regular cuyos lados miden 20 cms. y su altura es de 37.5 cms. Hallar volumen y área lateral de la pirámide.



Para determinar el volumen, es necesario calcular el área de la base, la cual se calcula dividendo el hexágono en 6 triángulos equiláteros de 20 cms. por lado y por tanto de altura $10\sqrt{3}$

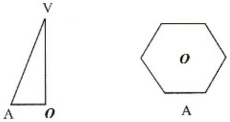
Así,

$$\text{Área de la base} = 6\left[\frac{1}{2}(20)(10\sqrt{3})\right] \approx 1039.23\ \text{cm}^2$$

$$\text{Volumen de la pirámide} = (1039.23)(37.5)\ /\ 3$$

$$= 12990.38\ \text{cms.}^3$$

Previo a calcular el área lateral se necesita determinar el apotema. Sobre la pirámide se considera el triángulo AOV, donde V es el vértice, O el centro de la base y A el punto medio de uno de los lados del hexágono.



El segmento OV coincide con la altura de la pirámide, el segmento AO con la altura de cada uno de los 6 triángulos en que se divide el hexágono. Por tanto sus longitudes son:

$$\overline{AO} = 10\sqrt{3}\ \text{cm} \quad \text{y} \quad \overline{OV} = 37.5\ \text{cm}$$

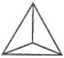
Aplicando el teorema de Pitágoras $\overline{AV} \approx 41.31$ cm, medida del apotema.

Por lo tanto,

$$\text{Área lateral} = 6(20)(41.31) / 2 = 2479 \text{ cm}^2$$

A continuación están dibujadas tres pirámides regulares. el tetraedro, la pirámide triangular y la cuadrangular; junto con el desarrollo de cada una de ellas.

Tetraedro: es una pirámide formada por cuatro triángulos equiláteros. Cualquier cara, por tanto, puede ser la base.



Desarrollo:

En este caso particular.

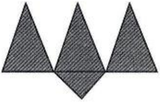
$$\text{Área lateral} = \frac{3}{2} \text{ base. apotema}$$

$$\text{Área total} = 2 \text{ base. apotema}$$

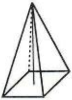
Siendo apotema $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. (lado del triángulo)

Pirámide triangular: la base es un triángulo equilátero y las caras laterales son triángulos isósceles.

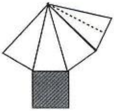
Desarrollo:



Pirámide cuadrangular: aquí la base es un cuadrado, teniendo cuatro caras laterales.



Desarrollo:



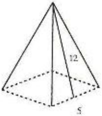
Ejemplo:

$$\left[(4)(5)\right]\frac{(12)}{2} = 120 \text{ pulg}^2$$

Encuentre el área total y lateral de la pirámide cuadrangular cuya base es de 5 pulgs. de lado y apotema de 12 pulgs.

Área lateral =

Área de base = $5^2 = 25$ pulg^2



Área total = 145 pulg^2

El área lateral es 120 pulg^2 y el área total 145 pulg^2

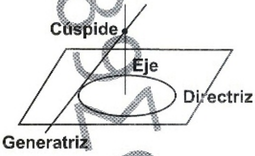
5.2.2 Cuerpos redondos.

Se estudiarán las características generales y específicas de cada cuerpo redon do: *el cono, el cilindro y la esfera.*

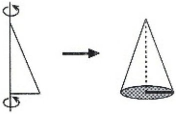
En general, estos tres cuerpos se generan al hacer girar una curva alrededor de un eje. La curva que gira recibe el nombre de generatriz y los puntos que ella describe forman una circunferencia.

EL CONO

Es el cuerpo geométrico redondo que se obtiene al girar una recta oblicua desde un punto fijo del eje. A ese punto se le llama cúspide. La recta, llamada generatriz, gira a lo largo de una circuferencia -directriz- que se encuentra en otro plano.



Otra forma más sencilla de determinar la formación de un cono es rotar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.



ELEMENTOS

En el siguiente dibujo, podemos distinguir los elementos de un cono recto:

- Eje: es el cateto AC. Alrededor de él gira el triángulo rectángulo.
- Base: es el círculo que genera la rotación del otro cateto, AB. Por lo tanto AB es el radio del cono.
- Generatriz: es la hipotenusa BC del triángulo rectángulo, que genera la región lateral conocida como manto del cono.
- Altura: corresponde al eje del cono, porque une el centro del círculo con la cúspide siendo perpendicular a la base.

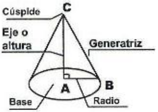


Figura 57

Concluyendo: el cono tiene una base plana y una cara lateral curva. Posee una arista circular y un vértice llamado cúspide.

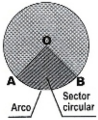
Si la altura coincide con su eje, el cono es recto. Si el eje y la altura no coinciden, el cono es oblicuo.

Al abrir un cono recto obtenemos su desarrollo, es decir, la plantilla dibujada en un mismo plano para poder construirlo.

Desarrollo del Cono

Figura 58

- *La cara lateral o manto* de un cono corresponde a un sector circular.
- Llamamos *sector circular* a una parte del círculo formado por 2 radios y el arco de circunferencia comprendido entre ellos.



En el manto del cono, los radios son la generatriz, y el arco equivale al perímetro de la circunferencia que sirve como base.

Entonces, el área total de un cono se obtiene con la fórmula:

Área total = área del círculo + área del sector circular

Donde, Área del sector circular = πrg

Siendo, r = radio

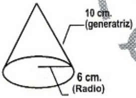
g = generatriz

Una forma equivalente de calcular el área lateral es la siguiente:

Área lateral = (perímetro de la base.generatriz) / 2

Ejemplo:

Calcular el área del siguiente cono con radio de 6 cms y generatriz 10 cms



Área de la base $= \pi(6)^2 = 36\pi\ cm^2$

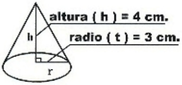
Área del sector circular $= \pi(6)(10) = 60\pi\ cm^2$

Área total $= 36\pi + 60\pi = 96\pi\ cm^2$

Algunas veces no se conoce la medida de la generatriz o del radio. En estos casos habrá que aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular cateto o hipotenusa del triángulo rectángulo que genera el cono.

Ejemplo:

Calcular el área total de un cono de radio 3 cm y altura 4 cm.



En este caso la generatriz, corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo. Aplicamos el Teorema de Pitágoras para su cálculo:

$$\begin{aligned} g^2 &= r^2 + h^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Luego,

$$g = 5 \text{ cms}$$

Área total $= \pi(3)^2 + \pi(3)(5)$
$= 9\pi + 15$
$= 24\pi \text{ cm}^2$

Para calcular su volumen se emplea la siguiente fórmula:

Volumen del cono = (área de la base.altura) / 3

Ejemplo:

Encuentre el volumen del cono si el radio de la base es de 10 cms y la altura es de 15 cms.

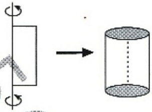
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi(100)(15) = 500\pi$$

El volumen es 500 cms^2

El Cilindro

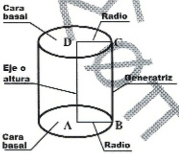
El cilindro es el sólido generado por un rectángulo al girar en torno a uno de sus lados.



Elementos

Por medio del dibujo siguiente, es posible determinar los elementos de un cilindro, que son:

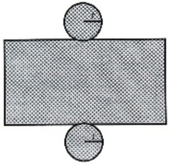
- *Eje*: lado AD, alrededor del cual gira el rectángulo.
- *Bases*: son los círculos paralelos y congruentes que se generan al girar los lados AB y CD del rectángulo. Cada uno de estos lados es el radio de su círculo y también, el radio del cilindro.
- *Altura*: corresponde al mismo eje AD; es perpendicular a las bases y llega al centro de ellas. Esta es la razón por la que el cilindro es recto.
- *Generatriz*: es el lado BC, congruente con el lado AD, y que al girar forma la cara lateral o manto del cilindro.



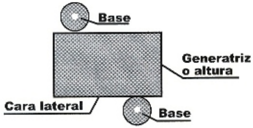
Resumiendo: el cilindro tiene 2 basales planas, paralelas y congruentes. 1 cara lateral que es curva y 2 aristas basales.

Al abrir un cilindro y colocar todas las caras en un mismo plano, obtenemos su desarrollo. Así:

Desarrollo del Cilindro



Se puede observar que se forma un rectángulo para la cara lateral, cuyos lados son el perimetro de la circunferencia que forma las bases y la altura o generatriz.



Por tanto, el área lateral del cilindro es:
Área lateral = perímetro de la base.altura
= 2π . radio de la base . altura

Área total de un cilindro

Al igual que en el cono, el área total de un cilindro se obtiene con la suma del área de la base y el área lateral. En el cilindro tenemos 2 bases que son círculos congruentes, y una cara lateral que es un rectángulo.

Así,

Área total = Área lateral + 2 (área de la base)

Para calcular su volumen se emplea la siguiente fórmula:
Volumen del cilindro = área de la base.altura

Ejemplo:

Calcular el área total y el volúmen del cilindro de radio 8 m. y altura 12 m.

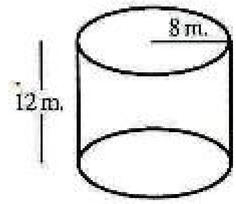


Figura 64

$$\text{Área de la base} = \pi(8)^2$$
$$= 64\pi\, m^2$$

$$\text{Área lateral} = 2\pi(8)12$$
$$= 192\pi\, m^2$$

Por tanto,

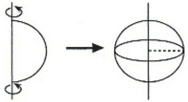
$$\text{Área total} = 2(64)\pi + 192\pi$$
$$= 320\pi\, m^2$$

El volúmen de este mismo cilindro es:

$$\text{Volumen} = (64\pi)12$$
$$= 768\pi\, m^3$$

Esfera

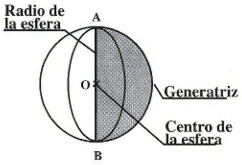
Es el cuerpo redondo que se genera al rotar un semicírculo alrededor de su diámetro.



ELEMENTOS

Al girar el semicírculo alrededor del diámetro AB, se genera una superficie esférica donde se determinan los siguientes elementos:

- *Generatriz*: es la semicircunferencia que genera la superficie esférica.
- *Centro de la esfera*: es el centro de la semicircunferencia y corresponde al punto O.
- *Radio de la esfera*: es el radio de la semicircunferencia: AO
- *Diámetro de la esfera:* es el segmento que une 2 puntos opuestos de la superficie esférica, pasando por el centro: AB.

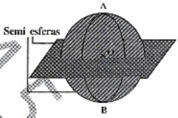


En este esquema se observan los elementos:

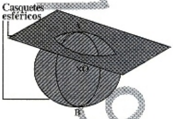
- La esfera tiene una sola cara curva.
- Todos los puntos que forman la superficie esférica equidistan de un punto fijo llamado centro, y que corresponde al centro de la semicircunferencia que gira.

Cortes

Una esfera puede ser cortada por un plano que pasa por su centro. De esta forma se obtienen 2 semiesferas y el plano deja como borde una circunferencia máxima.



Si el plano corta a la esfera sin pasar por su cento se obtienen 2 casquetes esféricos.



Área de una esfera

El área de una esfera se obtiene con el cuádruplo del área de su círculo máximo. Recordemos que se llama círculo máximo al que pasa por el centro de la esfera. Entonces la fórmula es:

$$\text{Área de la esfera} = 4\pi\ r^2$$

Volumen de le esfera $= \frac{4}{3}\pi$ x radio al cubo

$$= \frac{4}{3}\pi\ r^3$$

Ejemplo. Si una esfera tiene un radio de 2 m., su área será:

$$\text{Área} = 4\pi\ (2)^2$$
$$= 16\pi\ \ m^2$$

y su volumen

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi\ (2)^3$$
$$= \frac{32}{3}\pi\ \ m^3$$

EJERCICIOS

1) Encuentre el volumen y el área de cada prisma con un polígono regular como base.

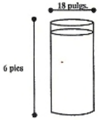
No.	Base	Medida del lado de la base	Medida de Altura del prisma
1	Triángulo equilátero	6	15
2	Cuadrado	8	10
3	Hexágono	20	25
4	Pentágono	18	10
5	Dodecágono	12	15
6	Decágono	5	9

2) A continuación se le indica el radio y la medida de la altura. Encuentre el volumen del cilindro recto circular.

No.	r	g
1.	4	10
2.	2	9
3.	20	15
4.	1 1/2	4

3) El diámetro interno de una tubería es de 2 pulgadas. El largo de la tubería es de 16 pies. (**a**) ¿Cuántas pulgadas cúbicas de agua pueden llenarla? (**b**) ¿Cuántos galones? (Existen 231 pulgadas cúbicas en un galón de agua)

4) Un tanque cilíndrico tiene un diámetro interno de 18 pulgadas. El tanque tiene 6 pies de altura. ¿Cuál es la capacidad (**a**) en pies cúbicos? (**b**) en galones?



5) Un vaso cilíndrico de agua contiene un diámetro de 4 pulgadas. El vaso mide 5 pulgadas de altura. ¿Cuántas pulgadas cúbicas de líquido puede contener?

6) Un vaso cilíndrico de jugo de frutas tiene un diámetro interno de 2 pulgadas. Y tiene 4 pulgadas de altura. ¿Cuántas pulgadas cúbicas de líquido puede contener?

7) Una rueda sólida cilíndrica, tiene un radio de 3 pulgadas y una altura de 4 pies. (**a**) ¿Cuántas pulgadas cúbicas de metal existen en el cilindro? (**b**) Si la rueda cilíndrica pesa 0.2833 libras por pulgada cúbica, ¿Cuál es el peso del cilindro?

8) Encuentre el área y el volumen de una esfera, de la cual se le da el radio en pulgadas.

1. 6 **2.** 4 **3.** 20 **4.** 9

9) Se tiene una pelota de cuero de 1 pulgada de diámetro. Encuentre el peso de la pelota si su cuero pesa 710 libras por pie cuadrado.

10) Una pelota de croquet que tiene 6 pulgadas de diámetro, elaborada de algodón cuyo peso es de 50 libras por pie cúbico. Encuentre el peso de la pelota.

UNIVERSIDAD RAFAEL LANDÍVAR

AUTORIDADES:

2a. Edición

Autores: Lic. Jorge H. Rodríguez M.
Licda. Vilma Ortíz de Jofre
Ingra. Dennisse E. de Sandoval

Diseño y diagramación: Licda. Vilma Ortíz de Jofre
Ingra. Dennisse E. de Sandoval

® Universidad Rafael Landívar
Departamento de Matemática
Campus Central, Vista Hermosa III, zona 16,
Edificio J, Segundo nivel.
Guatemala, 01016
Tels.: (502) 24262626
Página Web: www.url.edu.gt