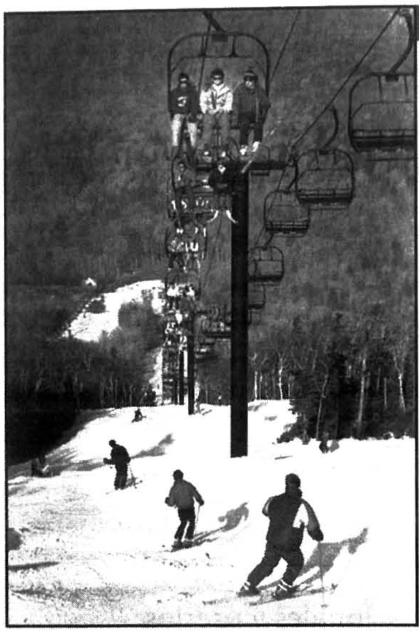
capítulo 15

SERIES DE TIEMPO Y PRONÓSTICOS

Objetivos

- Aprender por qué los cambios en los pronósticos que tienen lugar en tiempo constituyen una parte importante de la toma de decisiones
- Entender las cuatro componentes de una serie de tiempo
- Utilizar técnicas basadas en la regresión para estimar y pronosticar la tendencia de una serie de tiempo
- Aprender cómo medir la componente cíclica de una serie de tiempo
- Calcular índices estacionales y usarlos para desestacionalizar una serie de tiempo
- Ser capaces de reconocer una variación irregular en una serie de tiempo
- Manejar simultáneamente las cuatro componentes de una serie de tiempo y utilizar el análisis de series de tiempo para pronosticar

Contenido del capítulo



La administración de un campo de esquí tiene los siguientes datos acerca de la ocupación trimestral correspondientes a un periodo de cinco años:

Año	1er. trim.	2o. trim.	3er. trim.	4o. trim.
2005	1,861	2,203	2,415	1,908
2006	1,921	2,343	2,514	1,986
2007	1,834	2,154	2,098	1,799
2008	1,837	2,025	2,304	1,965
2009	2,073	2,414	2,339	1,967

Con el fin de mejorar su servicio, la administración debe entender el patrón estacional de la demanda de habitaciones. Con los métodos analizados en este capítulo, ayudaremos a la administración del hotel a discernir ese patrón, si existe, y a utilizarlo para pronosticar la demanda de habitaciones. ■

15.1 Introducción

Los pronósticos, o predicciones, son una herramienta esencial en cualquier proceso de toma de decisiones. Sus aplicaciones varían desde la determinación de los requerimientos de inventario de una pequeña zapatería hasta la estimación de las ventas anuales de juegos de video. La calidad de los pronósticos que los tomadores de decisiones pueden realizar está estrechamente relacionada con la información que puede extraerse y utilizarse a partir de los datos históricos. El *análisis de series de tiempo* es un método cuantitativo que utilizamos para determinar patrones de comportamiento en los datos recolectados a través del tiempo. La tabla 15-1 es un ejemplo de datos de una serie de tiempo.

Uso del análisis de series de tiempo

El análisis de series de tiempo se utiliza para detectar patrones de cambio o permanencia en la información estadística en intervalos o periodos regulares. *Proyectamos* estos patrones para obtener una estimación para el futuro. En consecuencia, el análisis de series de tiempo nos ayuda a manejar la incertidumbre asociada con los acontecimientos futuros.

Tabla 15-1

Serie de tiempo para el número de buques cargados, en Morehead, Carolina del Norte

Año	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Número	98	105	116	119	135	156	177	208

Ejercicios 15.1

Conceptos básicos

- ■ **15-1** ¿Qué valor tienen los pronósticos en el proceso de toma de decisiones?
- ■ **15-2** ¿Con qué propósito aplicamos el análisis de series de tiempo a datos recolectados durante un tiempo?
- ■ **15-3** ¿Qué beneficios proporciona la determinación de patrones históricos?
- ■ **15-4** ¿Cómo afectarán los errores en los pronósticos al gobierno de una ciudad?

15.2 Variación en las series de tiempo

Cuatro tipos de variación en las series de tiempo

Utilizamos el término *serie de tiempo* para referirnos a cualquier grupo de información estadística que se acumula a intervalos regulares. Con respecto en una variable de interés, existen cuatro tipos de cambio o variación implicados en el análisis de series de tiempo, éstos son:

1. Tendencia secular o variación secular
2. Fluctuación cíclica o variación cíclica
3. Variación estacional
4. Variación irregular

Tendencia secular

Con el primer tipo de variación, la *tendencia secular*, el valor de la variable tiende a aumentar o disminuir en un periodo muy largo. El incremento estable en los costos de vida registrados en el Índice de Precios al Consumidor (IPC) es un ejemplo de tendencia secular. De un año a otro, el costo de vida varía bastante, pero si examinamos un periodo a largo plazo, nos damos cuenta que la tendencia tiende a aumentar de manera estable. La gráfica (a) de la figura 15-1 muestra una tendencia secular en una serie de tiempo creciente que fluctúa.

Fluctuación cíclica

El segundo tipo de variación observado en una serie de tiempo es la *fluctuación cíclica*. El ejemplo más común de fluctuación cíclica es el ciclo económico. A través del tiempo, hay años en los que

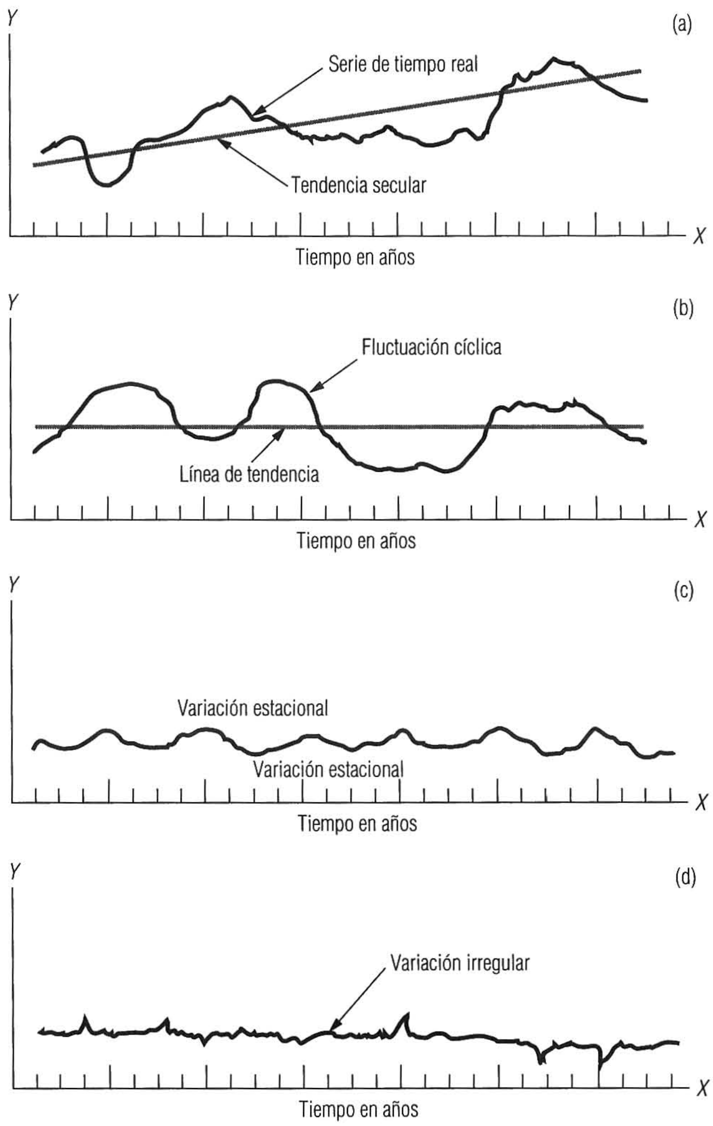


FIGURA 15-1

Variación en las series de tiempo

el ciclo económico llega a un pico arriba de la línea de tendencia; en otros, es probable que la actividad de los negocios disminuya abajo de la línea de tendencia. El tiempo que transcurre entre picos y depresiones es al menos un año, y puede llegar a ser hasta 15 o 20. La gráfica (b) de la figura 15-1 ilustra un patrón típico de fluctuación cíclica arriba y abajo de la línea de tendencia secular. Observe que los movimientos cíclicos no siguen ningún patrón regular, sino que se mueven de manera un tanto impredecible.

Variación estacional

El tercer tipo de cambio en los datos de una serie de tiempo es la *variación estacional*. Como cabría esperar, este tipo de variación implica patrones de cambio en el lapso de un año que tienden a repetirse anualmente. Por ejemplo, un médico puede esperar un aumento sustancial en el número de casos de gripe cada invierno y de afectados de tifoidea cada verano. Como se trata de patrones regulares son útiles al pronosticar el futuro. La gráfica (c) de la figura 15-1 muestra una variación estacional. Note cómo alcanza un pico cada cuarto trimestre del año.

Variación irregular

La *variación irregular* es el cuarto tipo de cambio que ocurre en el análisis de las series de tiempo. En muchas situaciones, el valor de una variable puede ser completamente impredecible cambiando de manera aleatoria. Las variaciones irregulares describen esos movimientos. Los efectos que el conflicto de Medio Oriente en 1973, la situación de Irán en 1979-1981, el colapso de la OPEP en 1986 y la situación de Irak en 1990 tuvieron sobre los precios de la gasolina en Estados Unidos son ejemplos de variación irregular. La gráfica (d) de la figura 15-1 ilustra la variación irregular.

Hasta ahora, nos hemos referido a las series de tiempo como datos que presentan una de las cuatro variaciones descritas. Sin embargo, en la mayor parte de los casos las series de tiempo contienen varias de estas componentes. Así, podemos describir la variación total en una sola serie de tiempo en términos de estas cuatro clases de variación. En las siguientes secciones examinaremos las cuatro componentes y las formas en que medimos cada uno.

Ejercicios 15.2

Conceptos básicos

- **15-5** Identifique las cuatro principales componentes de una serie de tiempo y explique el tipo de cambio, en el tiempo, al que se aplica.
- **15-6** ¿Cuál de las cuatro componentes de una serie de tiempo se utilizaría para describir el efecto de las ventas navideñas de una tienda departamental al menudeo?
- **15-7** ¿Cuál es la ventaja de descomponer una serie de tiempo en sus cuatro componentes?
- **15-8** ¿Cuál de las cuatro componentes de una serie de tiempo debería utilizar el Departamento de Agricultura de Estados Unidos para describir un patrón climatológico de siete años?
- **15-9** ¿Cómo se explicaría una guerra en una serie de tiempo?
- **15-10** ¿Qué componente de una serie de tiempo explica el crecimiento y decrecimiento general de la industria del acero en los dos últimos siglos?
- **15-11** Utilizando los cuatro tipos de variación, describa el comportamiento de los precios del petróleo crudo de 1990 a 2009.

15.3 Análisis de tendencia (variación secular)

Dos métodos para ajustar una línea de tendencia

De las cuatro componentes de una serie de tiempo, la tendencia secular representa la dirección a largo plazo de la serie. Una manera de describir la componente que corresponde a la tendencia es ajustar visualmente una recta a un conjunto de puntos de una gráfica. Pero cualquier gráfica dada estará sujeta a interpretaciones que varían de un individuo a otro. Podemos también ajustar una línea de tendencia con el método de mínimos cuadrados, estudiado en el capítulo 12. En nuestro análisis, nos concentraremos en el método de mínimos cuadrados, ya que el ajuste visual de una recta a una serie de tiempo no es un proceso de estimación seguro.

Razones para estudiar las tendencias

Tres razones para el estudio de las tendencias seculares

Existen tres razones por las cuales resulta útil estudiar las tendencias seculares:

1. **El estudio de tendencias seculares nos permite describir un patrón histórico.** Existen muchos ejemplos en los que podemos utilizar un patrón del pasado para evaluar el éxito de una política anterior. Por ejemplo, una universidad puede evaluar la efectividad de un programa de captación de estudiantes mediante el examen de sus tendencias en las inscripciones anteriores.
2. **El estudio de tendencias seculares nos permite proyectar patrones o tendencias pasados al futuro.** El conocimiento del pasado nos puede hablar en gran medida acerca del futuro. Por ejemplo, el examen de la tasa de crecimiento de la población mundial puede ser de ayuda para estimar la población en algún momento futuro dado.
3. **En muchas situaciones, el estudio de la tendencia secular de una serie de tiempo nos permite eliminar la componente de tendencia de la serie.** Esto facilita el estudio de las otras tres componentes de la serie de tiempo. Si deseamos determinar la variación estacional de la venta de esquíes, por ejemplo, la eliminación de la componente de tendencia nos proporciona una idea más precisa de la componente estacional.

Las líneas de tendencia toman diferentes formas

Las tendencias pueden ser rectas o curvilíneas (logarítmicas, exponenciales, potenciales y polinómicas). Antes de examinar el método lineal o de línea recta para describir tendencias, debemos recordar que algunas relaciones no toman esa forma. El aumento de contaminantes en el ambiente sigue una curva de pendiente creciente parecida a la que mostramos en la gráfica (a) de la figura 15-2. Otro ejemplo común de una relación curvilínea es el ciclo de vida de un nuevo producto comercial, que se ilustra en la gráfica (b) de la misma figura. Cuando se introduce en el mercado un nuevo producto, su volumen de ventas es bajo (I). Conforme el producto adquiere reconocimiento y éxito, las ventas aumentan con una rapidez cada vez mayor (II). Después de que el producto se establece firmemente, sus ventas crecen con rapidez constante (III). Por último, cuando el producto llega al fin de su ciclo de vida, las ventas unitarias empiezan a disminuir (IV).

Ajuste de la tendencia lineal con el método de mínimos cuadrados

Además de las tendencias que se pueden describir por una curva, existen otras que se describen por una línea recta. Éstas se conocen como tendencias lineales. Antes de desarrollar la ecuación para una tendencia lineal, necesitamos revisar la ecuación general para estimar una línea recta (ecuación 12-3):

Ecuación para estimar una recta ⟶ $$\hat{Y} = a + bX \qquad [12\text{-}3]$$

donde,

- $\hat{Y}$ = valor estimado de la variable dependiente
- X = variable independiente (*tiempo* en el análisis de tendencia)
- a = ordenada al origen (el valor de $\hat{Y}$ cuando $X = 0$)
- b = pendiente de la recta de tendencia

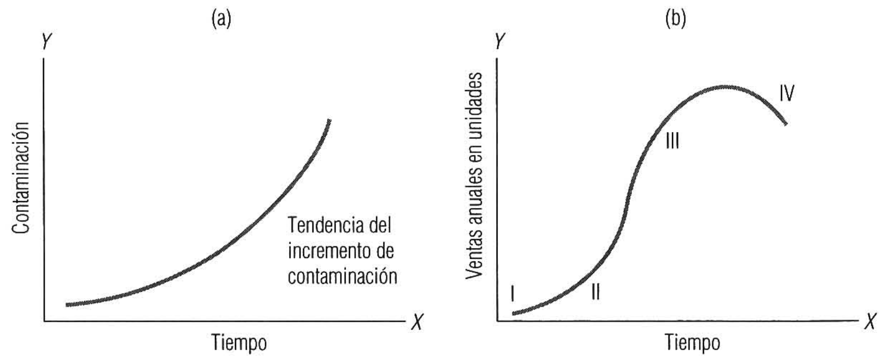


FIGURA 15-2

Relaciones de tendencia curvilínea

Búsqueda de la recta de tendencia de mejor ajuste

Podemos describir la tendencia general de muchas series de tiempo utilizando una línea recta. Pero nos encontramos con el problema de buscar la recta, o ecuación, de mejor ajuste. Del mismo modo que en el capítulo 12, podemos utilizar el método de mínimos cuadrados para calcular la recta o ecuación de mejor ajuste. En ese capítulo, vimos que la recta de mejor ajuste estaba determinada por las ecuaciones 12-4 y 12-5, que representamos ahora como ecuaciones 15-1 y 15-2.

Pendiente de la recta de regresión de mejor ajuste

$$b = \frac{\Sigma XY - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\Sigma X^2 - n\overline{X}^2} \qquad [15\text{-}1]$$

Ordenada *Y* de la recta de regresión de mejor ajuste

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} \qquad [15\text{-}2]$$

donde,

- Y = observaciones de la variable dependiente
- X = observaciones de la variable independiente
- $\overline{Y}$ = media de las observaciones de la variable dependiente
- $\overline{X}$ = media de las observaciones de la variable independiente
- n = número de datos en la serie de tiempo
- a = ordenada al origen
- b = pendiente de la recta

Con las ecuaciones 15-1 y 15-2 podemos establecer la recta de mejor ajuste (el que minimiza los errores) para describir los datos de la serie. Sin embargo, la regularidad de los datos de la serie de tiempo nos permite simplificar los cálculos de las ecuaciones 15-1 y 15-2 mediante el proceso que describiremos a continuación.

Traducción o codificación del tiempo

Codificación de la variable tiempo para simplificar los cálculos

Normalmente, medimos la variable independiente *tiempo* en términos de *semanas*, *meses* o *años*. Afortunadamente, podemos convertir estas medidas tradicionales de tiempo a una forma que simplifica los cálculos. En el capítulo 3, llamamos *codificación* a este proceso. Para utilizar la codificación en este caso, encontramos el tiempo medio y luego restamos ese valor de cada uno de los tiempos de la muestra. Suponga que nuestra serie de tiempo consiste en tres puntos, 2004, 2005 y 2006. Si tuviéramos que sustituir estas cantidades en las ecuaciones 15-1 y 15-2, veríamos que los cálculos resultantes son tediosos. En su lugar, podemos transformar los valores 2004, 2005 y 2006 en los valores correspondientes -1, 0 y 1, en donde 0 representa la media (2005), -1 representa el primer año ($2004 - 2005 = -1$) y 1 el último año ($2006 - 2005 = 1$).

Manejo de números pares e impares de elementos

Cuando codificamos valores de tiempo es necesario tomar en cuenta dos casos. El primero es una serie de tiempo con un *número impar de elementos*, como en el ejemplo anterior; el segundo, una serie de tiempo con un *número par de elementos*. Considere la tabla 15-2. En la parte *a*, a la izquierda, tenemos un número impar de años. En consecuencia, el proceso es el mismo que el que acabamos de describir utilizando los años 2004, 2005 y 2006. En la parte *b*, a la derecha, tenemos un número *par* de elementos. En casos como éste, cuando encontramos la media y la restamos de cada elemento, la fracción 1/2 se convierte en parte de la respuesta. Para simplificar el proceso de codificación y eliminar el 1/2, multiplicamos cada elemento de tiempo por dos. Denotaremos el tiempo "codificado" o traducido con la letra minúscula x.

¿Por qué usar un código?

Existen dos razones para hacer esta traducción del tiempo. Primero, elimina la necesidad de elevar al cuadrado números grandes como 2004, 2005 y 2006, etc. Este método también hace que el año medio, $\overline{x}$, sea igual a cero y permite simplificar las ecuaciones 15-1 y 15-2.

Tabla 15-2

Traducción o codificación de los valores de tiempo

(a) Cuando hay un número impar de elementos en la serie de tiempo

X (1)	$-X-\bar{X}$ (2)	Tiempo traducido o codificado (3)
2002	2002 − 2005 =	−3
2003	2003 − 2005 =	−2
2004	2004 − 2005 =	−1
2005	2005 − 2005 =	0
2006	2006 − 2005 =	1
2007	2007 − 2005 =	2
2008	2008 − 2005 =	3
$\Sigma X = 13{,}944$		$\bar{x}$ (el año medio) = 0

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{13{,}944}{7} = 1992$$

(b) Cuando hay un número par de elementos en la serie de tiempo

X (1)	$X-\bar{X}$ (2)	$(X-\bar{X}) \times 2$ (3)	Tiempo traducido o codificado (4)
2003	2003 − 2005½ =	−2½ × 2 =	−5
2004	2004 − 2005½ =	−1½ × 2 =	−3
2005	2005 − 2005½ =	−½ × 2 =	−1
2006	2006 − 2005½ =	½ × 2 =	1
2007	2007 − 2005½ =	1½ × 2 =	3
2008	2008 − 2005½ =	2½ × 2 =	5
$\Sigma X = 11{,}955$			$\bar{x}$(el año medio) = 0

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{11{,}955}{6} = 1992\tfrac{1}{2}$$

implificación del álculo de a y b

Ahora ya podemos regresar al cálculo de la pendiente (ecuación 15-1) y la ordenada Y (ecuación 15-2) para determinar la recta de mejor ajuste. Como estamos utilizando la variable codificada x, sustituimos X y $\bar{X}$ por x y $\bar{x}$ en las ecuaciones 15-1 y 15-2. Entonces, como la media de nuestra variable tiempo codificada $\bar{x}$ es cero, podemos sustituir 0 por $\bar{x}$ en las ecuaciones 15-1 y 15-2, como sigue:

$$b = \frac{\Sigma XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\Sigma X^2 - n\bar{X}^2} \qquad [15\text{-}1]$$

$$= \frac{\Sigma xY - n\bar{x}\bar{Y}}{\Sigma x^2 - n\bar{x}^2} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{x (la variable codificada) sustituida} \\ \text{en lugar de X y $\bar{x}$ en lugar de $\bar{X}$} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\Sigma xY - n0\bar{Y}}{\Sigma x^2 - n0^2} \leftarrow \text{$\bar{x}$ sustituida por 0}$$

Pendiente de la línea de tendencia para valores de tiempo codificados

$$b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} \qquad [15\text{-}3]$$

La ecuación 15-2 cambia de la siguiente manera:

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} \qquad [15\text{-}2]$$

$$= \bar{Y} - b\bar{x} \leftarrow \text{$\bar{x}$ en lugar de $\bar{X}$}$$

$$= \bar{Y} - b0 \leftarrow \text{$\bar{x}$ sustituida por 0}$$

Ordenada *Y* de la recta de tendencia para valores de tiempo codificados

$$a = \bar{Y} \qquad [15\text{-}4]$$

Las ecuaciones 15-3 y 15-4 representan una mejora sustantiva respecto a las ecuaciones 15-1 y 15-2.

Un problema que usa el método de mínimos cuadrados en una serie de tiempo (número par de elementos)

Uso del método de mínimos cuadrados

Considere los datos de la tabla 15-1, que ilustran el número de buques cargados en la ciudad de Morehead entre 2002 y 2009. En este problema, queremos encontrar la ecuación que describirá la tendencia secular de las cargas. Para calcular los valores necesarios para las ecuaciones 15-3 y 15-4, observemos la tabla 15-3.

Búsqueda de la pendiente y la ordenada Y

Podemos sustituir estos valores en las ecuaciones 15-3 y 15-4 para encontrar la pendiente y la ordenada Y para la recta que describe la tendencia en las cargas de buques:

$$b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} \qquad [15\text{-}3]$$

$$= \frac{1{,}266}{168}$$

$$= 7.536$$

y

$$a = \overline{Y} \qquad [15\text{-}4]$$

$$= 139.25$$

Así, la ecuación lineal general que describe la tendencia secular en la carga de buques es

$$\hat{Y} = a + bx \qquad [12\text{-}3]$$

$$= 139.25 + 7.536x$$

donde,

- $\hat{Y}$ = número estimado anual de barcos cargados
- x = valor de tiempo codificado que representa el número de intervalos de *mitad de año* (el signo menos indica intervalos de mitad de año anteriores a $2005\frac{1}{2}$; el signo más indica intervalos de mitad de año posteriores a $2005\frac{1}{2}$)

Tabla 15-3

Cálculos intermedios para calcular la tendencia

X (1)	Y† (2)	$X - \overline{X}$ (3)	x (3) × 2 = (4)	xY (4) × (2)	x^2 $(4)^2$
2002	98	$1988 - 1991\frac{1}{2}$‡ $= -3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2} \times 2 = -7$	−686	49
2003	105	$1989 - 1991\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2} \times 2 = -5$	−525	25
2004	116	$1990 - 1991\frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2} \times 2 = -3$	−348	9
2005	119	$1991 - 1991\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \times 2 = -1$	−119	1
2006	135	$1992 - 1991\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2 = 1$	135	1
2007	156	$1993 - 1991\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} \times 2 = 3$	468	9
2008	177	$1994 - 1991\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2} \times 2 = 5$	885	25
2009	208	$1995 - 1991\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2} \times 2 = 7$	1,456	49
ΣX = 15,932	**ΣY = 1,114**			**ΣxY = 1,266**	**Σx^2 = 168**

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{15{,}932}{8} = 1{,}991\tfrac{1}{2}$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{1{,}114}{8} = 139.25$$

† Y es el número de buques.

‡ $1991\frac{1}{2}$ corresponde a $x = 0$.

Proyección con la ecuación de tendencia

Una vez desarrollada la ecuación de tendencia, podemos proyectarla para pronosticar la variable en cuestión. En el problema de hallar la tendencia secular de las cargas de buques, por ejemplo, determinamos que la ecuación de tendencia secular apropiada es

$$\hat{Y} = 139.25 + 7.536x$$

Uso de nuestra recta de tendencia para pronosticar

Ahora suponga que deseamos estimar las cargas de buques para 2010. Primero, debemos convertir 1996 al valor de tiempo codificado (en intervalos de mitad de año).

$$\begin{aligned} x &= 2010 - 2005\tfrac{1}{2} \\ &= 4.5 \text{ años} \\ &= 9 \text{ intervalos de } \textit{mitad} \text{ de año} \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación correspondiente a la tendencia secular, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 139.25 + 67.82 \\ &= 139.25 + 67.82 \\ &= 207 \text{ barcos cargados} \end{aligned}$$

Por consiguiente, hemos estimado que se cargarán 207 barcos en 2010. Si el número de elementos de nuestra serie de tiempo hubiera sido impar, no par, nuestro procedimiento hubiera sido el mismo, excepto que hubiéramos manejado intervalos de cada año, no intervalos de mitad de año.

Uso de una ecuación de segundo grado en una serie de tiempo

Manejo de series de tiempo descritas por curvas

Hasta aquí hemos descrito el método de ajustar una recta a una serie de tiempo. Pero muchas series de tiempo se describen mejor por curvas que por rectas. En estos casos, el modelo lineal no describe de manera adecuada el cambio en la variable conforme pasa el tiempo. Para vencer este problema, a menudo utilizamos una curva parabólica, que se describe matemáticamente por una *ecuación de segundo grado*. Este tipo de curva se ilustra en la figura 15-3. La forma general para una ecuación de segundo grado estimada es:

Forma general para una ecuación de segundo grado ajustada

$$\hat{Y} = a + bx + cx^2 \qquad [15\text{-}5]$$

donde,

- $\hat{Y}$ = estimación de la variable dependiente
- a, b y c = constantes numéricas
- x = valores codificados de la variable tiempo

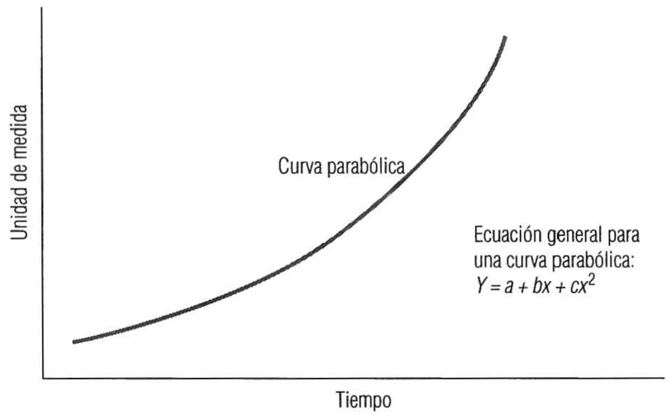


FIGURA 15-3

Forma y ecuación de una curva parabólica

Búsqueda de valores para a, b y c

De nuevo utilizamos el método de mínimos cuadrados para determinar la ecuación de segundo grado que describe el mejor ajuste. La derivación de la ecuación de segundo grado está más allá del propósito de este libro; sin embargo, podemos determinar el valor de las constantes numéricas (a, b y c) a partir de las siguientes tres ecuaciones:

Coeficientes de mínimos cuadrados para una tendencia de segundo grado

Ecuaciones para encontrar a, b y c para ajustar una curva parabólica →

$$\begin{cases} \Sigma Y = an + c\Sigma x^2 & [15\text{-}6] \\ \Sigma x^2 Y = a\Sigma x^2 + c\Sigma x^4 & [15\text{-}7] \\ b = \dfrac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} & [15\text{-}3] \end{cases}$$

Después de encontrar los valores de a, b y c resolviendo las ecuaciones 15-6, 15-7 y 15-3, de manera simultánea, sustituimos estos valores en la ecuación 15-5 de segundo grado.

Al igual que en la descripción de una relación lineal, transformamos la variable independiente, tiempo (X), en una forma codificada (x) para simplificar los cálculos. Ahora trabajaremos con un problema en el cual ajustamos una parábola a una serie de tiempo.

Problema que involucra una tendencia parabólica (número impar de elementos en la serie de tiempo)

En los últimos años, la venta de teléfonos móviles ha aumentado con una rapidez significativa. La tabla 15-4 contiene información acerca de las ventas de estos artículos que será útil para determinar la tendencia parabólica que describe esta variable en el tiempo.

Codificación de la variable tiempo

En la tabla 15-5 organizamos los cálculos necesarios. El primer paso en este proceso es traducir la variable independiente X en una variable de tiempo codificada x. Note que la variable codificada x está dada en intervalos de cada año, debido a que tenemos un número impar de elementos en nuestra serie de tiempo. Así, no es necesario multiplicar la variable por 2.

Cálculo de a, b y c por sustitución

Sustituyendo los valores de la tabla 15-5 en las ecuaciones 15-6, 15-7 y 15-3, obtenemos

$$247 = 5a + 10c \quad (1) \qquad [15\text{-}6]$$

$$565 = 10a + 34c \quad (2) \qquad [15\text{-}7]$$

$$b = \frac{227}{10} \quad (3) \qquad [15\text{-}3]$$

De (3), vemos que

$$b = 22.7$$

Se puede encontrar a y c al resolver las ecuaciones simultáneas (1) y (2). Al hacerlo, se encuentra que a es 39.3 y c es 5.07.

Esto nos da los valores apropiados de a, b y c para describir la serie de tiempo presentada en la tabla 15-4 mediante la ecuación:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= a + bx + cx^2 \qquad [15\text{-}5] \\ &= 39.3 + 22.7x + 5.07x^2 \end{aligned}$$

Tabla 15-4

Ventas anuales de teléfonos móviles

X (año)	2005	2006	2007	2008	2009
Y (ventas unitarias en millones)	13	24	39	65	106

Tabla 15-5

Cálculos intermedios para determinar la tendencia

Y (1)	X (2)	$X - \bar{X} = x$ (3)	x^2 $(3)^2$	x^4 $(3)^4$	xY (3) × (1)	x^2Y $(3)^2$ × (1)
13	2005	2005 − 2007 = −2	4	16	−26	52
24	2006	2006 − 2007 = −1	1	1	−24	24
39	2007	2007 − 2007 = 0	0	0	0	0
65	2008	2008 − 2007 = 1	1	1	65	65
106	2009	2009 − 2007 = 2	4	16	212	424
$\Sigma Y = 247$	$\Sigma X = 9{,}965$		$\Sigma x^2 = 10$	$\Sigma x^4 = 34$	$\Sigma xY = 227$	$\Sigma x^2Y = 565$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{9{,}965}{5} = 1993$$

¿Se ajusta la curva a los datos?

Se grafican los datos de los teléfonos para ver qué tan bien se ajusta la parábola desarrollada a la serie de tiempo. La figura 15-4 presenta esta gráfica.

Pronósticos basados en una ecuación de segundo grado

Para pronosticar

Suponga que deseamos pronosticar las ventas de teléfonos para 2014. Para hacer una predicción, debemos primero transformar 2014 en una variable codificada x restándole el año medio, 2007:

$$X - \bar{X} = x$$

$$2014 - 2007 = 7$$

Después este valor codificado ($x = 7$) se sustituye en la ecuación de segundo grado que describe la venta de teléfonos:

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= 39.3 + 22.7x + 5.07x^2 \\ &= 39.3 + 22.7(7) + 5.07(7)^2 \\ &= 39.3 + 158.9 + 248.4 \\ &= 446.6\end{aligned}$$

Con base en la tendencia secular histórica, concluimos que las ventas de teléfonos deberá ser aproximadamente 446,600,000 unidades en 2014. Sin embargo, este pronóstico tan alto sugiere que debemos ser más cuidadosos al pronosticar con una tendencia parabólica que cuando trabajamos con una tendencia lineal. La pendiente de la ecuación de segundo grado de la figura 15-4 se incrementa continuamente; en consecuencia, la parábola puede convertirse en un estimador ineficiente si intentamos pronosticar a un plazo mayor. Al utilizar el método de la ecuación de segundo grado, también debemos considerar factores que pueden estar frenando o invirtiendo la tasa de crecimiento de la variable.

Ser cuidadosos al interpretar la predicción

En el ejemplo de la venta de teléfonos podemos suponer que durante el periodo considerado, el producto se encuentra en una etapa de crecimiento muy rápido de su ciclo de vida. Pero debemos darnos cuenta de que a medida que el ciclo se acerca a la etapa de madurez, el crecimiento de las

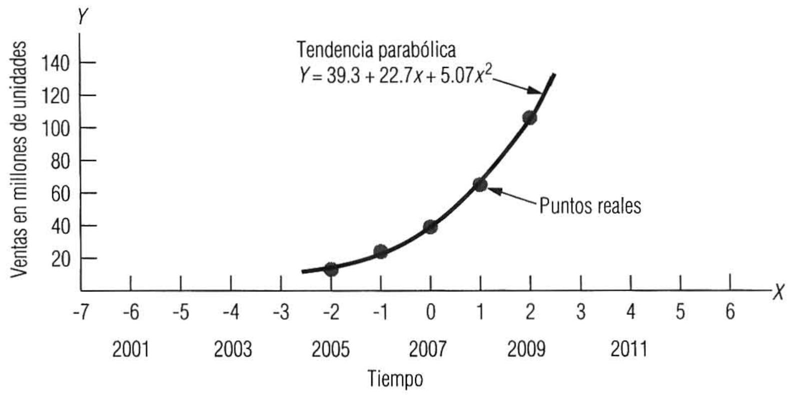


FIGURA 15-4

Tendencia parabólica ajustada para los datos de tabla 15-4 ventas puede disminuir y la parábola ya no predecir con precisión. Cuando calculamos predicciones debemos considerar la posibilidad de que la línea de tendencia puede *cambiar*. Esta situación puede ocasionar un error significativo. Por tanto, es necesario poner una atención especial cuando se utiliza una ecuación de segundo grado como herramienta de pronóstico.

SUGERENCIAS Y SUPOSICIONES

Advertencia: "ningún árbol crece hasta el cielo" es un proverbio de Wall Street que significa que ningún precio de acción sube para siempre. Esto también se aplica a los pronósticos hechos con ecuaciones de segundo grado. Extrapolar una tasa de crecimiento de una compañía que comienza (que inicia con cero ventas de manera que un dólar de venta se convierte de manera automática en una tasa de crecimiento *infinito*) es riesgoso. Las tasas iniciales de crecimiento rara vez continúan.

Ejercicios 15.3

Ejercicios de autoevaluación

EA 15-1 Robin Zill y Stewart Griffiths son los propietarios de una pequeña fábrica de mesas de masaje portátiles en Hillsborough, Carolina del Norte. Desde que inició la compañía, el número de mesas que han vendido está representado por esta serie de tiempo:

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Mesas vendidas	42	50	61	75	92	111	120	127	140	138

a) Encuentre la ecuación lineal que describe la tendencia del número de mesas vendidas por Robin y Stewart.
b) Estime sus ventas para 2011.

EA 15-2 El número de académicos que poseen computadoras personales en la Universidad de Ohio ha aumentado drásticamente entre 1990 y 1995:

Año	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Número de PC	50	110	350	1,020	1,950	3,710

a) Desarrolle la ecuación de estimación lineal que mejor describa estos datos.
b) Desarrolle la ecuación de estimación de segundo grado que mejor describa los datos.
c) Estime el número de computadoras personales que habrá en uso en la universidad en 2013, utilizando ambas ecuaciones.
d) Si hay 8,000 académicos en la universidad, ¿qué ecuación es mejor pronosticador? ¿Por qué?

Aplicaciones

■ **15-12** Jeff Richards invirtió los ahorros de toda su vida e inició un negocio de limpieza de alfombras en 1999. Desde entonces, la reputación de Jeff se ha propagado y el negocio ha crecido. Los números promedio de casas que ha limpiado por mes cada año son:

Año	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Casas limpiadas	6.4	11.3	14.7	18.4	19.6	25.7	32.5	48.7	55.4	75.7	94.3

a) Encuentre la ecuación lineal que describa la tendencia de estos datos.
b) Estime el número de casas limpiadas mensualmente en 2010, 2011 y 2012.

■ **15-13** El dueño de la compañía Progressive Builders está examinando el número de casas solares que iniciaron su construcción en la región durante los últimos siete meses:

Mes	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Número de casas	16	17	25	28	32	43	50

a) Grafique estos datos.
b) Desarrolle la ecuación de estimación lineal que mejor describa estos datos, y grafique la recta en la gráfica del inciso a) (una unidad de x igual a 1 mes).

c) Desarrolle la ecuación de estimación de segundo grado que mejor describa estos datos y grafique esta curva en la gráfica del inciso a).
d) Estime las ventas de marzo utilizando ambas curvas graficadas.

■ **15-14** Richard Jackson desarrolló un ratón para computadora ergonómico en 2002 y las ventas han ido en aumento desde entonces. A continuación se presentan datos en términos de miles de ratones vendidos por año.

Año	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Número vendido	82.4	125.7	276.9	342.5	543.6	691.5	782.4	889.5

a) Desarrolle la ecuación de estimación lineal que mejor describa estos datos.
b) Desarrolle la ecuación de estimación de segundo grado que mejor describa estos datos.
c) Estime el número de ratones que venderá en 2011 usando ambas ecuaciones.
d) Si se supone que la tasa de crecimiento de las ventas de ratones decrecerá pronto con base en la oferta y la demanda, ¿qué modelo será un mejor pronosticador para su respuesta en c)?

■ **15-15** Mike Godfrey, auditor de un sistema escolarizado de educación pública, ha revisado los registros de inventario para determinar si las existencias reales de libros de texto son típicas. Las cantidades de inventario siguientes corresponden a los cinco años anteriores:

Año	2005	2006	2007	2008	2009
Inventario (miles de dólares)	$4,620	$4,910	$5,490	$5,730	$5,990

a) Encuentre la ecuación lineal que describa la tendencia en las existencias de inventario.
b) Estime para el auditor el valor del inventario para el año 2010.

■ **15-16** La siguiente tabla describe los precios del correo de primera clase desde 1980 hasta 2009:

Año	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2003	2005	2007	2009
Precio (ctvos.)	5	5	8	8	10	13	15	18	20	22	25	25	29	29	32

a) Desarrolle la ecuación de estimación lineal que mejor describa los datos.
b) Desarrolle la ecuación de estimación de segundo grado que mejor describa los datos.
c) ¿Existe algún indicador en el entorno económico o político que sugiera que una de las dos ecuaciones tiene mayor posibilidad de ser mejor pronosticador de los precios postales?

■ **15-17** Ingeniería Environtech, una compañía especializada en la construcción de dispositivos de filtrado anticontaminante, ha registrado los siguientes niveles de ventas durante los últimos nueve años:

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Ventas (cientos de miles de dólares)	13	15	19	21	27	35	47	49	57

a) Grafique los datos.
b) Desarrolle la ecuación de estimación lineal que mejor describa estos datos y grafique la recta en la gráfica del inciso a).
c) Desarrolle la ecuación de estimación de segundo grado que mejor describa los datos, y grafique la ecuación en la gráfica del inciso a).
d) ¿Según el conocimiento adquirido al respecto, el mercado favorece a b) o c) como el método de estimación más preciso?

■ **15-18** A continuación presentamos los datos que describen el índice de contaminación de aire [en partes por millón (ppm) de partículas en el aire] de una ciudad del oeste de Estados Unidos:

Año	1990	1995	2000	2005
Índice de contaminación	220	350	800	2,450

a) ¿Qué ecuación de estimación, lineal o de segundo grado, proporciona la mejor predicción de los índices de contaminación de la ciudad?
b) Considerando el entorno económico, social y político, ¿cambiaría usted la respuesta del inciso a)?
c) Describa cómo las acciones políticas y sociales podrían cambiar la efectividad de las ecuaciones de estimación del inciso a).

■ **15-19** El Departamento Estatal de Vehículos estudia el número de muertes por accidentes de tránsito en el estado debido a conductores ebrios, y registró el número de muertes en los nueve años anteriores:

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Muertes	175	190	185	195	180	200	185	190	205

a) Encuentre la ecuación lineal que describe la tendencia en el número de muertes en accidentes de tránsito en el estado debidas a conductores ebrios.