6

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

De la misma forma en que los virus biológicos se propagan a través del contacto entre organismos, también los virus de computadora se difunden cuando las computadoras interactúan vía Internet. Los científicos computacionales estudian cómo combatir los virus de computadora, que causan mucho daño ya que borran o alteran archivos. Uno de sus esfuerzos consiste en diseñar modelos matemáticos acerca de la rapidez con que se propagan los virus. Por ejemplo, el viernes 26 de marzo de 1999 se reportó el primer caso del virus conocido como Melissa; para el lunes 29 de marzo, Melissa había alcanzado a más de 100 000 computadoras.

Las funciones exponenciales, que se estudian con detalle en este capítulo, proporcionan un modelo plausible. Considere un virus de computadora que se oculta en un archivo adjunto de correo electrónico y que una vez que se baja, de manera automática provoca el envío de un mensaje y de un archivo adjunto similar a todas las direcciones de la libreta de direcciones de correo electrónico de la computadora anfitriona. Si una libreta de direcciones típica contiene 20 direcciones, y si el usuario común revisa su correo electrónico una vez por día, entonces el virus proveniente de una sola máquina habrá infectado a 20 en un día, $20^2 = 400$ máquinas al cabo de dos días, $20^3 = 8000$ después de tres días y, en general, después de t días, el número N de computadoras infectadas estará dado por la función exponencial $N(t) = 20^t$.

Este modelo supone que todas las computadoras implicadas están ligadas unas con otras a través de su libreta de direcciones, en un solo grupo bien conectado. Los modelos exponenciales son más precisos para pequeños valores de t, este modelo en particular, no toma en cuenta el descenso que ocurre cuando la mayoría de los correos electrónicos alcanzan computadoras que ya están infectadas; lo cual sucede después de varios días. Por ejemplo, el modelo desarrollado aquí indica que después de ocho días infectará a $20^8 = 25.6$ miles de millones de computadoras (¡más computadoras de las que existen en la actualidad!). Pero a pesar de sus limitaciones, los modelos exponenciales ciertamente explican el porqué con frecuencia los nuevos virus infectan a miles de máquinas antes de que los expertos en antivirus tengan tiempo de reaccionar.

6.1 Funciones exponenciales

OBJETIVO

Estudiar las funciones exponenciales y sus aplicaciones en temas como interés compuesto, crecimiento poblacional y decaimiento radiactivo.

Existe una función que desempeña un papel importante no sólo en matemáticas, sino también en finanzas, economía y otras áreas de estudio. Incluye una constante elevada a una potencia variable, como $f(x) = 2^x$. Las funciones de este tipo se llaman *funciones exponenciales*.

DEFINICIÓN

La función f definida por

$$f(x) = b^x$$

donde $b > 0$, $b \neq 1$, y el exponente x es cualquier número real, se llama ***función exponencial*** con base b.[1]

ADVERTENCIA

No confunda la función exponencial $y = 2^x$ con la *función potencia* $y = x^2$, que tiene una base variable y un exponente constante.

Como el exponente de b^x puede ser cualquier número real, el lector quizá se pregunte cómo se asigna un valor a algo como $2^{\sqrt{2}}$, donde el exponente es un número irracional. Simplemente se utilizan aproximaciones. Como $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$, $2^{\sqrt{2}}$ es aproximadamente $2^{1.4} = 2^{7/5} = \sqrt[5]{2^7}$, que *sí* está definido. Las mejores aproximaciones son $2^{1.41} = 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}}$, y así sucesivamente. De esta manera se aclara el significado de $2^{\sqrt{2}}$. El valor que da una calculadora para $2^{\sqrt{2}}$ es (aproximadamente) 2.66514.

Cuando se trabaja con funciones exponenciales puede ser necesario aplicar las reglas de los exponentes. Estas reglas se presentan a continuación, donde m y n son números reales y a y b son positivos.

APUNTADOR

Si desea revisar los exponentes, consulte la sección 0.3.

Reglas de los exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$	**5.** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	**6.** $a^1 = a$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	**7.** $a^0 = 1$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	**8.** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Algunas funciones que no parecen tener la forma exponencial b^x pueden expresarse en esa forma al aplicar las reglas anteriores. Por ejemplo, $2^{-x} = 1/(2^x) = (\frac{1}{2})^x$ y $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

CRECIMIENTO DE BACTERIAS

El número de bacterias de un cultivo que duplica su número cada hora, está dado por $N(t) = A \cdot 2^t$, donde A es el número presente originalmente y t es el número de horas que las bacterias se han estado duplicando. Utilice una calculadora graficadora para graficar esta función con diferentes valores de $A > 1$. ¿En qué se parecen las gráficas? ¿Cómo altera a la gráfica el valor de A?

● EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias

El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos está dado por

$$N(t) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^t$$

Observe que $N(t)$ es un múltiplo constante de la función exponencial $\left(\frac{4}{3}\right)^t$.

[1] Si $b = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$. Esta función ya se ha estudiado antes y se conoce como función constante.

a. *¿Cuántas bacterias están presentes inicialmente?*

Solución: Aquí se quiere determinar $N(t)$ cuando $t = 0$. Se tiene

$$N(0) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 300(1) = 300$$

Así que al inicio hay 300 bacterias presentes.

b. *Aproximadamente, ¿cuántas bacterias están presentes después de 3 minutos?*

Solución:

$$N(3) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 300\left(\frac{64}{27}\right) = \frac{6400}{9} \approx 711$$

Por lo que, después de 3 minutos, hay casi 711 bacterias presentes.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

GRÁFICA DE FUNCIONES EXPONENCIALES CON $b > 1$

Suponga que una inversión aumenta 10% cada año. Haga una tabla del factor por el cual la inversión aumenta a partir de la cantidad original desde los 0 hasta los 4 años. Para cada año, construya una expresión que describa el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esta base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función del número de años. Utilice su gráfica para determinar cuándo se duplica la inversión.

Gráficas de funciones exponenciales

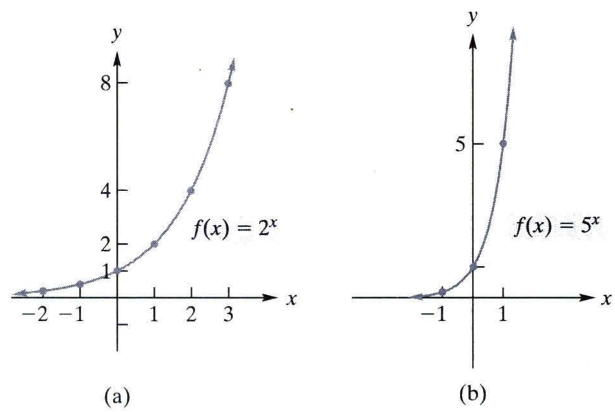
EJEMPLO 2 Gráficas de funciones exponenciales con $b > 1$

Grafique las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ *y* $f(x) = 5^x$.

Solución: Las gráficas de la figura 6.1 se obtuvieron al localizar puntos y conectarlos. No se muestran los puntos $(-2, \frac{1}{25})$, $(2, 25)$ y $(3, 125)$ para la gráfica de $f(x) = 5^x$, debido a la unidad de distancia seleccionada sobre el eje y.

Pueden hacerse algunas observaciones acerca de estas gráficas. El dominio de cada función consiste en el conjunto de todos los números reales, y el rango en todos los números reales positivos. Cada gráfica tiene intersección y $(0, 1)$. Aún más, estas gráficas tienen la misma forma general. Cada una *asciende* de izquierda a derecha. Conforme aumenta x, $f(x)$ también aumenta. De hecho, $f(x)$ aumenta indefinidamente. Sin embargo, en el primer cuadrante, la gráfica de $f(x) = 5^x$ asciende más rápidamente que $f(x) = 2^x$, porque la base en 5^x es *mayor* que la base en 2^x (esto es, $5 > 2$). En el segundo cuadrante se observa que a medida que x se hace más negativa, las gráficas de ambas funciones se aproximan al eje x.[2] Esto implica que los valores de las funciones se hacen muy cercanos a 0.

x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



x	5^x
-2	$\frac{1}{25}$
-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25
3	125

FIGURA 6.1 Gráficas de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

[2]Se dice que el eje x es una *asíntota* para cada gráfica.

Las observaciones hechas en el ejemplo 2 son ciertas para todas las funciones exponenciales cuya base b es mayor que 1. En el ejemplo 3 se examinará el caso de una base entre 0 y 1 $(0 < b < 1)$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

GRÁFICA DE FUNCIONES EXPONENCIALES CON $0 < b < 1$

Suponga que el valor de un automóvil se deprecia 15% cada año. Haga una tabla del factor por el cual disminuye su monto original desde los 0 hasta los 3 años. Para cada año, escriba una expresión para la disminución como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esta base con el problema? Utilice la tabla para graficar la disminución multiplicativa como una función del número de años. Utilice su gráfica para determinar cuándo el automóvil disminuye su valor a la mitad del valor original.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función exponencial con $0 < b < 1$

Grafique la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución: La gráfica de la figura 6.2 se obtiene al localizar puntos y conectarlos. Observe que el dominio equivale a todos los números reales y el rango a todos los números reales positivos. La gráfica tiene intersección y $(0, 1)$. Comparadas con las gráficas del ejemplo 2, se observa que aquí la gráfica *desciende* de izquierda a derecha. Es decir, conforme x aumenta $f(x)$ disminuye. Note que cuando x toma valores muy positivos, $f(x)$ toma valores muy cercanos a 0 y la gráfica se aproxima al eje x. Sin embargo, cuando x se vuelve muy negativa los valores de la función no están acotados.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

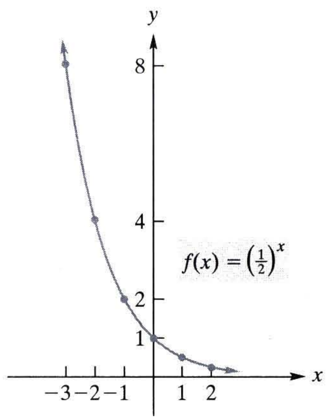


FIGURA 6.2 Gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Existen dos formas básicas para las gráficas de las funciones exponenciales y dependen de la base involucrada.

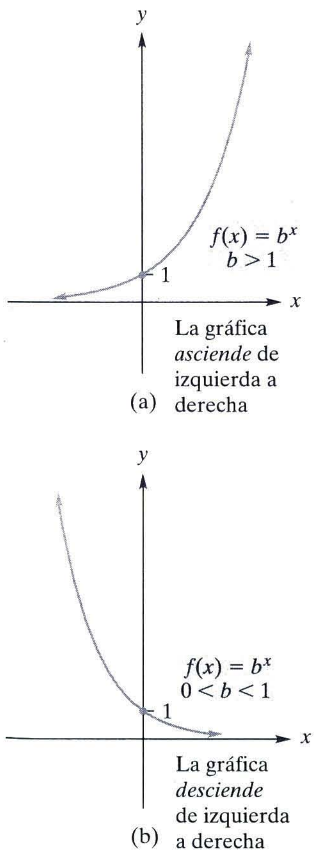


FIGURA 6.3 Formas generales de $f(x) = b^x$.

En general, las gráficas de las funciones exponenciales adoptan una de dos posibles formas básicas, y dependen del valor de la base b. Esto se ilustra en la figura 6.3. Es importante observar que, en cualquier caso, la gráfica pasa la prueba de la línea horizontal. Por lo tanto, todas las funciones exponenciales son uno a uno. En la tabla 6.1 se resumen las propiedades básicas de una función exponencial y su gráfica.

Recuerde que, de acuerdo con la sección 3.7, la gráfica de una función puede estar relacionada con otra por medio de cierta transformación. El ejemplo siguiente se refiere a este concepto.

TABLA 6.1 Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$

1. El dominio de una función exponencial consiste de todos los números reales. El rango consiste de todos los números positivos.
2. La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene intersección y $(0, 1)$. No hay intersección x.
3. Si $b > 1$, la gráfica *asciende* de izquierda a derecha. Si $0 < b < 1$, la gráfica *desciende* de izquierda a derecha.
4. Si $b > 1$, la gráfica se acerca al eje x conforme x se vuelve más y más negativa. Si $0 < b < 1$, la gráfica se acerca al eje x y x se vuelve más y más negativa.

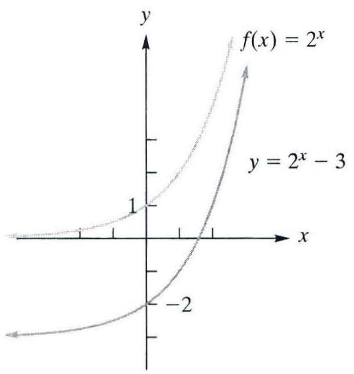


FIGURA 6.4 Gráfica de $y = 2^x - 3$.

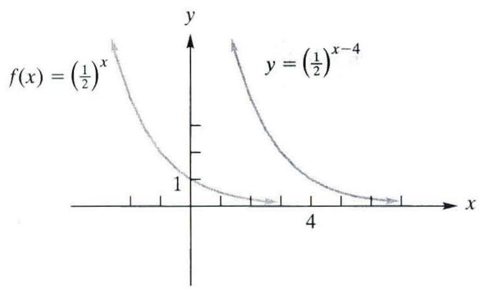
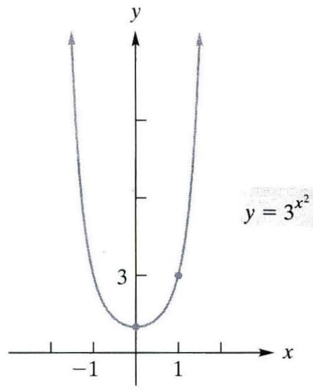


FIGURA 6.5 Gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$.



x	0	1	2
y	1	3	81

FIGURA 6.6 Gráfica de $y = 3^{x^2}$.

En el ejemplo 4 se hace uso de las transformaciones de la tabla 3.2 de la sección 3.7.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Después de observar cómo creció el dinero de su hermana durante tres años en un plan con una tasa de interés de 8% anual, George abrió una cuenta de ahorros con el mismo plan. Si $y = 1.08^t$ representa el aumento multiplicativo en la cuenta de su hermana, escriba una ecuación que represente el aumento multiplicativo en la cuenta de George, utilice la misma referencia de tiempo. Si George tiene una gráfica de aumento multiplicativo del dinero de su hermana en el tiempo t desde que ella inició su ahorro, ¿cómo podría utilizar la gráfica para proyectar el incremento de su propio dinero?

EJEMPLO 4 Transformaciones de funciones exponenciales

a. *Use la gráfica de $y = 2^x$ para graficar $y = 2^x - 3$.*

Solución: La función tiene la forma $f(x) - c$, donde $f(x) = 2^x$ y $c = 3$. Así que su gráfica se obtiene al recorrer la gráfica de $f(x) = 2^x$ tres unidades hacia abajo (vea la figura 6.4).

b. *Use la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ para graficar $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$.*

Solución: La función tiene la forma $f(x - c)$, donde $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $c = 4$. Por lo tanto, su gráfica se obtiene al recorrer la gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ cuatro unidades hacia la derecha (vea la figura 6.5).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

EJEMPLO 5 Gráfica de una función con una base constante

Grafique $y = 3^{x^2}$.

Solución: Aunque ésta no es una función exponencial, tiene una base constante. Se observa que al reemplazar x por $-x$ resulta la misma ecuación. Así, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Al graficar algunos puntos y utilizar la simetría se obtiene la gráfica de la figura 6.6.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

TECNOLOGÍA

Si $y = 4^x$, considere el problema de encontrar x cuando $y = 6$. Una forma de resolverlo es encontrar la intersección de las gráficas de $y = 6$ y $y = 4^x$. En la figura 6.7 se muestra que x es aproximadamente igual a 1.29.

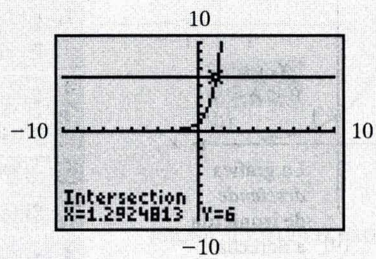


FIGURA 6.7 Resolución de la ecuación $6 = 4^x$.

Interés compuesto

Las funciones exponenciales están implicadas en el **interés compuesto**, en el cual el interés que genera una cantidad de dinero invertida (o **capital**), se invierte nuevamente de modo que también genere intereses. Es decir, el interés se convierte (o *compone*) en capital y, por lo tanto, hay "interés sobre interés".

Por ejemplo, suponga que se invierten \$100 a una tasa de 5% compuesto anualmente. Al final del primer año, el valor de la inversión es el capital original (\$100), más el interés sobre el capital [100(0.05)]:

$$100 + 100(0.05) = \$105$$

Ésta es la cantidad sobre la cual se genera el interés para el segundo año. Al final del segundo año, el valor de la inversión es el capital del final del primer año (\$105), más el interés sobre esa cantidad [105(0.05)]:

$$105 + 105(0.05) = \$110.25$$

Así, cada año el capital se incrementa en 5%. Los \$110.25 representan el capital original más todo el interés acumulado; esta cantidad se llama **monto acumulado** o **monto compuesto**. La diferencia entre el monto compuesto y el capital original se conoce como **interés compuesto**. Aquí, el interés compuesto es $110.25 - 100 = 10.25$.

De manera más general, si un capital de P dólares se invierte a una tasa de $100r$ por ciento compuesto anualmente (por ejemplo, a 5%, r es 0.05), la cantidad compuesta después de un año es $P + Pr$, o al factorizar, $P(1 + r)$. Al final del segundo año, la cantidad compuesta es

$$\begin{aligned} P(1+r) + [P(1+r)]r &= P(1+r)[1+r] \qquad \text{(al factorizar)} \\ &= P(1+r)^2 \end{aligned}$$

En realidad, el cálculo anterior que usa factorización no es necesario para mostrar que el monto compuesto después de dos años es $P(1 + r)^2$. Como *cualquier* monto P va le $P(1 + r)$ un año después, se deduce que el monto $P(1 + r)$ vale $P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2$ un año más tarde, y luego de otro año el monto $P(1 + r)^2$ valdrá $P(1 + r)^2 (1 + r) = P(1 + r)^3$.

Este patrón continúa. Después de cuatro años la cantidad compuesta es $P(1 + r)^4$. En general, **el monto compuesto S del capital P al final de n años a una tasa de r compuesta anualmente**, está dado por

$$S = P(1 + r)^n \qquad (1)$$

Observe que en la ecuación (1) para un capital y una tasa dados, S es una función de n. De hecho, S es una función exponencial con base $1 + r$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

MONTO COMPUESTO E INTERÉS COMPUESTO

Suponga que se invierten \$2000 al 13% compuesto anualmente. Encuentre el valor de la inversión después de cinco años. Determine el interés ganado durante los primeros cinco años.

EJEMPLO 6 Monto compuesto e interés compuesto

Suponga que se invierten \$1000 *durante* 10 *años al* 6% *compuesto anualmente.*

a. *Encuentre el monto compuesto.*

Solución: Se utiliza la ecuación (1) donde $P = 1000$, $r = 0.06$ y $n = 10$:

$$S = 1000(1 + 0.06)^{10} = 1000(1.06)^{10} \approx \$1790.85$$

En la figura 6.8 se muestra la gráfica de $S = 1000(1.06)^n$. Observe que conforme pasa el tiempo, el monto compuesto crece en forma dramática.

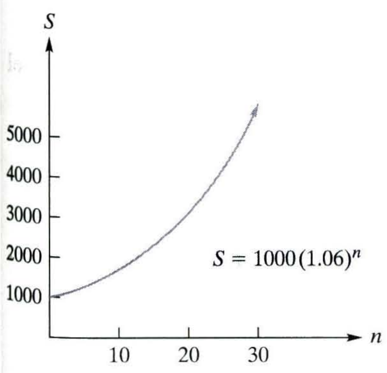


FIGURA 6.8 Gráfica de $S = 1000(1.06)^n$.

b. *Encuentre el interés compuesto.*

Solución: Con el uso de los resultados del inciso (a), se tiene

$$\begin{aligned} \text{interés compuesto} &= S - P \\ &= 1790.85 - 1000 = \$790.85 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

Suponga que el capital de \$1000 del ejemplo 6 se invierte durante 10 años como se hizo antes, pero esta vez se compone cada tres meses (esto es, *cuatro veces al año*) a una tasa de $1\frac{1}{2}\%$ *por trimestre.* Entonces hay cuatro **periodos de interés** por año, y en 10 años son $10(4) = 40$ periodos de interés. Así, el monto compuesto con $r = 0.015$ ahora es

$$1000(1.015)^{40} \approx \$1814.02$$

y el interés compuesto es \$814.02. En general, la tasa de interés por periodo de capitalización se establece como una tasa anual. Aquí se hablaría de una tasa anual de 6% compuesta trimestralmente, de modo que la tasa del interés en cada periodo, o **tasa periódica**, es $6\%/4 = 1.5\%$. Esta tasa anual *cotizada* de 6% se llama **tasa nominal** o **tasa de porcentaje anual (TPA)**. A menos que se especifique otra cosa, todas las tasas de interés se supondrán tasas anuales (nominales). Así, una tasa de 15% compuesta mensualmente corresponde a una tasa periódica de $15\%/12 = 1.25\%$.

Es común la abreviatura T.P.A., se encuentra en los contratos de tarjetas de crédito y en la publicidad.

Con base en el análisis anterior, puede generalizarse la ecuación (1). La fórmula

$$S = P(1 + r)^n \qquad (2)$$

proporciona **el monto acumulado S de un capital P al final de n periodos de interés a una tasa periódica de r.**

ADVERTENCIA

Una tasa nominal de 6% no significa necesariamente que una inversión aumente en 6% cada año. El incremento depende de la frecuencia de la capitalización.

Se ha visto que un capital de \$1000, a una tasa nominal de 6% en un periodo de 10 años, compuesto anualmente, tiene como resultado un interés compuesto de \$790.85, y compuesto trimestralmente da un interés de \$814.02. Es común que para una tasa nominal dada, entre más frecuentemente se componga, mayor será el interés compuesto. Sin embargo, pese a que incrementar el número de periodos de interés siempre incrementa al monto del interés ganado, el efecto no es indefinido. Por ejemplo, con una composición semanal el interés compuesto es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{52}\right)^{10(52)} - 1000 \approx \$821.49$$

y compuesto diariamente es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{10(365)} - 1000 \approx \$822.03$$

En ocasiones, la frase “valor del dinero” se usa para expresar una tasa de interés anual. Por lo que, al decir que el dinero vale 6% compuesto trimestralmente, se hace referencia a una tasa anual (nominal) de 6% compuesto cada trimestre.

Crecimiento poblacional

La ecuación (2) puede aplicarse no sólo al aumento del dinero, sino también a otros tipos de crecimiento, como al de la población. Por ejemplo, suponga que la población P de una ciudad con 10 000 habitantes, crece a una tasa de 2% por año. Entonces P es una función del tiempo t, donde t representa años. Es común indicar esta dependencia funcional mediante

$$P = P(t)$$

Aquí la letra P se utiliza en dos formas: en el lado derecho, P representa la función; en el lado izquierdo P representa la variable dependiente. De la ecuación (2), se tiene

$$P(t) = 10\,000(1 + 0.02)^t = 10\,000(1.02)^t$$

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6

CRECIMIENTO POBLACIONAL

Una compañía nueva con cinco empleados espera que el número de trabajadores crezca a una tasa de 120% anual. Determine el número de asalariados dentro de cuatro años.

EJEMPLO 7 Crecimiento poblacional

La población de una ciudad de 10 000 *habitantes crece a razón de* 2% *anual. Encuentre la población dentro de tres años.*

Solución: Del análisis anterior,

$$P(t) = 10\,000(1.02)^t$$

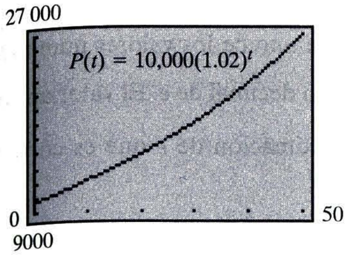


FIGURA 6.9 Gráfica de la función de población $P(t) = 10\,000(1.02)^t$.

Para $t = 3$, se tiene

$$P(3) = 10\,000(1.02)^3 \approx 10\,612$$

Por lo tanto, dentro de 3 años la población será de 10 612 habitantes (vea la figura 6.9).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

El número e

Es útil realizar un "experimento hipotético" con base en el análisis que siguió al ejemplo 6, a fin de presentar un número importante. Suponga que se invierte un solo dólar durante un año con una TPA de 100% (recuerde que se trata de un experimento hipotético) compuesto anualmente. Entonces el monto compuesto S al final del año está dado por

$$S = 1(1+1)^1 = 2^1 = 2$$

Sin cambiar ninguno de los otros datos, ahora se considerará el efecto de aumentar el número de periodos de interés por año. Si hay n periodos de interés por año, entonces el monto compuesto está dado por

$$S = 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

En la tabla siguiente se proporcionan valores aproximados de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ para algunos valores de n.

TABLA 6.2 Aproximaciones de e

n	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
1	$\left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2.00000$
2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25000$
3	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 2.37037$
4	$\left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2.44141$
5	$\left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2.48832$
10	$\left(\frac{11}{10}\right)^{10} \approx 2.59374$
100	$\left(\frac{101}{100}\right)^{100} \approx 2.70481$
1000	$\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \approx 2.71692$
10 000	$\left(\frac{10\,001}{10\,000}\right)^{10\,000} \approx 2.71815$
100 000	$\left(\frac{100\,001}{100\,000}\right)^{100\,000} \approx 2.71827$
1 000 000	$\left(\frac{1\,000\,001}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000} \approx 2.71828$

Resulta evidente que los números $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ aumentan conforme lo hace n. Sin embargo, no se incrementan en forma indefinida. Por ejemplo, es posible demostrar que para cualquier entero positivo n, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$. En términos del experimento hipotético, esto significa que si se inicia con una inversión de \$1.00 al 100%, no importa cuántos periodos de interés haya por año, siempre se tendrán menos de \$3.00 al final del año. Existe un mínimo número real que es mayor que todos los números $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Se denota mediante la letra e, en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

El número e es irracional porque su expansión decimal no se repite, como en π y $\sqrt{2}$ que se mencionaron en la sección 0.1. Sin embargo, cada uno de los valores numéricos de $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ puede considerarse como una aproximación decimal de e. El valor aproximado $\left(\frac{1\,000\,001}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000} \approx 2.71828$ proporciona una aproximación de e que es correcta hasta el quinto decimal.

Función exponencial con base e

El número

$$e \approx 2.718281828459$$

donde la aproximación dada es correcta hasta 12 decimales, se usa como la base para una función exponencial. La función exponencial con base e se conoce como **función exponencial natural**.

Aunque e puede parecer una base extraña, la función exponencial natural tiene una función importante en cálculo (como se verá más adelante en otro capítulo) que justifica el nombre. También surge en el análisis económico y en problemas que implican crecimiento o declinación como estudios poblacionales, interés compuesto y decaimiento radiactivo. En la mayoría de las calculadoras pueden encontrarse valores aproximados de e^x con un solo golpe de tecla. Se muestra la gráfica de $y = e^x$ en la figura 6.10. La tabla adjunta a la figura indica los valores de y con dos decimales. Por supuesto, la gráfica tiene la forma general de una función exponencial con base mayor que 1.

Debe familiarizarse con la gráfica de la función exponencial natural de la figura 6.10.

x	y
−2	0.14
−1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39

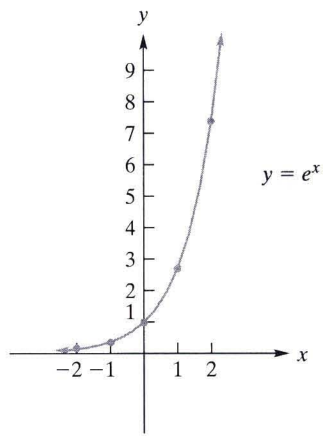


FIGURA 6.10 Gráfica de la función exponencial natural.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7

GRÁFICAS DE FUNCIONES QUE INCLUYEN A e

La disminución multiplicativa del poder de compra P después de t años de inflación al 6% puede modelarse mediante $P = e^{-0.06t}$. Grafique la disminución del poder de compra como una función t años.

EJEMPLO 8 Gráficas de funciones que incluyen a e

a. *Grafique* $y = e^{-x}$.

Solución: Como $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ y $0 < \frac{1}{e} < 1$, la gráfica es la de una función exponencial que desciende de izquierda a derecha (vea la figura 6.11). En forma alternativa, puede considerarse la gráfica de $y = e^{-x}$ como una transformación de la gráfica de $f(x) = e^x$. Como $e^{-x} = f(-x)$, la gráfica de $y = e^{-x}$ sólo es la reflexión de la gráfica de f con respecto al eje y. (Compare las gráficas de las figuras 6.10 y 6.11.)

b. *Grafique* $y = e^{x+2}$.

Solución: La gráfica de $y = e^{x+2}$ está relacionada con la de $f(x) = e^x$. Como e^{x+2} es $f(x+2)$, puede obtenerse la gráfica de $y = e^{x+2}$ mediante un corrimiento horizontal de la gráfica de $f(x) = e^x$ dos unidades a la izquierda. (Vea la figura 6.12.)

x	y
-2	7.39
-1	2.72
0	1
1	0.37
2	0.14

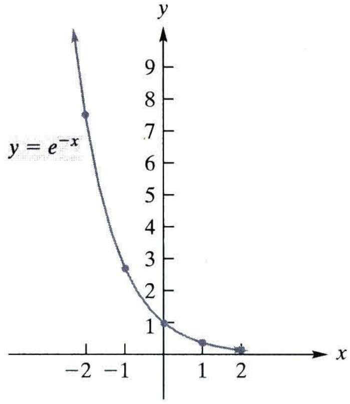


FIGURA 6.11 Gráfica de $y = e^{-x}$.

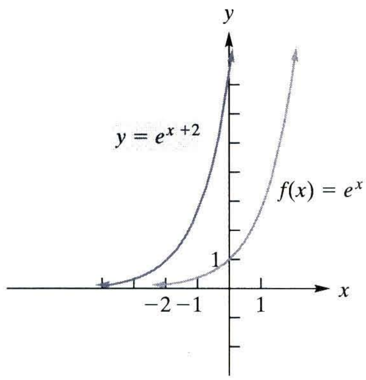


FIGURA 6.12 Gráfica de $y = e^{x+2}$.

EJEMPLO 9 Crecimiento poblacional

La población proyectada, P, de una ciudad está dada por

$$P = 100\,000e^{0.05t}$$

donde t es el número de años después de 1990. *Pronostique la población para el año* 2010.

Solución: El número de años desde 1990 hasta 2010 es 20, de modo que se establece $t = 20$. Entonces

$$P = 100\,000e^{0.05(20)} = 100\,000e^{1} = 100\,000e \approx 271\,828$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

En estadística, se utiliza una función importante como modelo para describir la ocurrencia de eventos en la naturaleza: la **función de distribución de Poisson**:

$$f(n) = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

El símbolo μ (que se lee "mu") es una letra griega. En ciertas situaciones $f(n)$ da la probabilidad de que exactamente n eventos ocurran en un intervalo de tiempo o espacio. La constante μ es el promedio, también llamado *media*, del número de ocurrencias en dicho intervalo. El ejemplo siguiente ilustra la distribución de Poisson.

EJEMPLO 10 Hemocitómetro y células

Un hemocitómetro es una cámara de conteo dividida en cuadrados que se utiliza para el estudio del número de estructuras microscópicas en un líquido. En un experimento muy conocido,[3] *se diluyeron y se mezclaron completamente algunas células de levadura en un líquido, y la mezcla se colocó en un hemocitómetro. Se contaron con un microscopio las células de levadura existentes en cada cuadrado. Se encontró que la probabilidad de que hubiera exactamente x células en cada cuadrado del hemocitómetro se ajustaba a una distribución de Poisson, en donde* $\mu = 1.8$. *Encuentre la probabilidad de hallar exactamente cuatro células en un cuadrado en particular.*

Solución: Se usa la función de distribución de Poisson con $\mu = 1.8$ y $n = 4$:

$$f(n) = \frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$$

$$f(4) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^4}{4!} \approx 0.072$$

[3] R. R. Sokal y F. J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973).

Por ejemplo, esto significa que en 400 cuadrados se *esperaría* que $400(0.072) \approx 29$ contuvieran exactamente 4 células. (En el experimento, en 400 cuadrados el número real observado fue de 30.)

Decaimiento radiactivo

Los elementos radiactivos tienen la característica de que su cantidad disminuye con el tiempo. Se dice que un elemento radiactivo *decae.* Si N es la cantidad en el tiempo t, entonces puede demostrarse que

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{3}$$

donde N_0 y λ (una letra griega que se lee "lambda") son constantes positivas. Observe que N incluye una función exponencial de t. Se dice que N sigue una **ley de decaimiento exponencial**. Si $t = 0$, entonces $N = N_0 e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$. Así, la constante N_0 representa la cantidad del elemento presente en el tiempo $t = 0$, y se le llama la **cantidad inicial**. La constante λ depende del elemento particular involucrado, y se llama **constante de decaimiento**.

Como N disminuye conforme el tiempo pasa, suponga que T es el tiempo que tarda el elemento en disminuir a la mitad de su cantidad inicial. Entonces en el tiempo $t = T$, se tiene $N = N_0/2$. La ecuación (3) implica que

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

Ahora se utilizará este hecho para demostrar que en *cualquier* intervalo de longitud T, la mitad de la cantidad del elemento decaerá. Considere el intervalo desde el tiempo t hasta $t + T$, que tiene longitud T. En el tiempo t, la cantidad de elemento es $N_0 e^{-\lambda t}$, y en el tiempo $t + T$ es

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda(t+T)} &= N_0 e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} = (N_0 e^{-\lambda T}) e^{-\lambda t} \\ &= \frac{N_0}{2} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}(N_0 e^{-\lambda t}) \end{aligned}$$

que es la mitad de la cantidad en el tiempo t. Esto significa que si la cantidad inicial presente N_0 fuera de 1 gramo, en el tiempo T quedaría $\frac{1}{2}$ gramo, en el tiempo $2T$ quedaría $\frac{1}{4}$ de gramo, y así sucesivamente. Este valor de T se conoce como la **vida media** del elemento radiactivo. La figura 6.13 muestra una gráfica de decaimiento radiactivo.

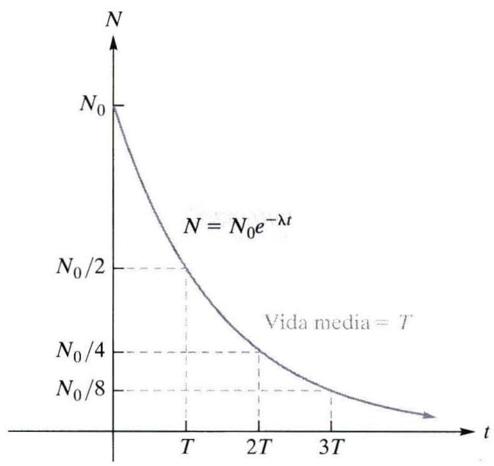


FIGURA 6.13 Decaimiento radiactivo.

EJEMPLO 11 Decaimiento radiactivo

Un elemento radiactivo decae de modo que después de t días el número de miligramos presentes está dado por

$$N = 100e^{-0.062t}$$

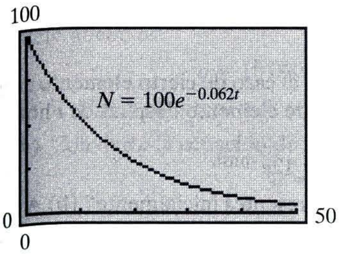


FIGURA 6.14 Gráfica de la función de decaimiento radiactivo $N = 100e^{-0.062t}$.

a. *¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente?*

Solución: Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (3), $N = N_0e^{-\lambda t}$, donde $N_0 = 100$ y $\lambda = 0.062$. N_0 es la cantidad inicial y corresponde a $t = 0$. Así que, en un inicio, están presentes 100 miligramos (vea la figura 6.14).

b. *¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?*

Solución: Cuando $t = 10$,

$$N = 100e^{-0.062(10)} = 100e^{-0.62} \approx 53.8$$

Por lo tanto, después de 10 días, están presentes aproximadamente 53.8 miligramos.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 47

Problemas 6.1

En los problemas 1 a 12, grafique cada función.

1. $y = f(x) = 4^x$
2. $y = f(x) = 3^x$
3. $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
4. $y = f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$
5. $y = f(x) = 2^{(x-1)^2}$
6. $y = f(x) = 3(2)^x$
7. $y = f(x) = 3^{x+2}$
8. $y = f(x) = 2^{x-1}$
9. $y = f(x) = 2^x - 1$
10. $y = f(x) = 3^{x-1} - 1$
11. $y = f(x) = 3^{-x}$
12. $y = f(x) = \frac{1}{2}(2^{x/2})$

Los problemas 13 y 14 se refieren a la figura 6.15, que muestra las gráficas de $y = 0.4^x$, $y = 2^x$ y $y = 5^x$.

13. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de $y = 5^x$?
14. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de $y = 0.4^x$?

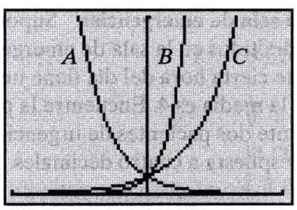


FIGURA 6.15 Diagrama para los problemas 13 y 14.

15. **Población** La población proyectada de una ciudad está dada por $P = 125\,000(1.11)^{t/20}$, donde t es el número de años a partir de 1995. ¿Cuál es la población que se pronostica para el año 2015?
16. **Población** Para cierta ciudad, la población P crece a una tasa de 1.5% por año. La fórmula $P = 1\,527\,000(1.015)^t$ da la población t años después de 1998. Encuentre la población en (a) 1999 y (b) 2000.
17. **Aprendizaje por asociación de pares** En un experimento psicológico sobre aprendizaje,[4] se pidió a un conjunto de personas proporcionar respuestas específicas después de recibir ciertos estímulos. Cada estímulo consistió en un par de letras y cada respuesta era un dígito, 1 o 2. Después de cada contestación se le revelaba al sujeto la respuesta correcta. En este experimento de aprendizaje denominado *asociación de pares*, la probabilidad teórica P de que el individuo dé la respuesta correcta en la n-ésimo prueba está dada por

$$P = 1 - \frac{1}{2}(1-c)^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad 0 < c < 1$$

donde c es una constante. Tome $c = \frac{1}{2}$ y encuentre P cuando $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$.

18. Exprese $y = 2^{3x}$ como una función exponencial de base 8.

En los problemas 19 a 27 encuentre (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto para la inversión y tasa anual dadas.

*19. \$4000 durante 7 años a 6% compuesto anualmente.
20. \$5000 durante 20 años a 5% compuesto anualmente.
21. \$700 durante 15 años a 7% compuesto semestralmente.
22. \$4000 durante 12 años a 7.5% compuesto semestralmente.
23. \$3000 durante 16 años a $8\frac{3}{4}$% compuesto trimestralmente.
24. \$2000 durante 12 años a 7% compuesto trimestralmente.
25. \$5000 durante $2\frac{1}{2}$ años a 9% compuesto mensualmente.
26. \$500 durante 5 años a 11% compuesto semestralmente.
27. \$8000 durante 3 años a $6\frac{1}{4}$% compuesto diariamente. (Suponga que hay 365 días en un año.)
28. **Inversiones** Suponga que se colocan \$900 en una cuenta de ahorros que gana intereses a una tasa de 4.5% compuesto semestralmente, (a) ¿Cuál es el valor de la cuenta al final de cinco años? (b) Si hubiera generado intereses a una tasa de 4.5% compuesto anualmente, ¿cuál sería su valor después de cinco años?

29. **Inversión** Se compra un certificado de depósito por \$6500 y se conserva durante seis años. Si gana 4% compuesto trimestralmente, ¿cuál es el valor del certificado al cabo de seis años?
30. **Crecimiento poblacional** La población de una ciudad de 5000 habitantes crece a razón de 3% anual. (a) Determine una ecuación que proporcione la población después de t años a partir de ahora. (b) Encuentre la población dentro de 3 años. Obtenga la respuesta para (b) al entero más cercano.

*31. **Crecimiento de bacterias** En cierto cultivo crecen bacterias, y su número se incrementa a razón de 5% cada hora. Al inicio existían 400 bacterias. (a) Determine una ecuación que proporcione el número, N, de bacterias presentes después de t horas. (b) ¿Cuántas habrá al cabo de 1 hora? (c) ¿Y después de 4 horas? Dé sus respuestas a (b) y (c) al entero más cercano.

[4] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press Inc., 1973).

32. Reducción de bacterias Cierta medicina reduce las bacterias presentes en una persona en 10% cada hora. Actualmente, existen 100 000 bacterias. Elabore una tabla de valores para el número de bacterias presentes en cada hora, desde 0 hasta 4 horas. Para cada hora, escriba una expresión para el número de bacterias como un producto de 100 000 y una potencia de $\frac{9}{10}$ 9/10. Utilice las expresiones para construir una entrada en su tabla para el número de bacterias después de t horas. Escriba una función N para el número de bacterias después de t horas.

33. Reciclado Suponga que la cantidad de plástico que se reciclará aumenta 30% cada año. Haga una tabla del factor por el cual aumenta el reciclado sobre la cantidad original desde 0 hasta 3 años. Para cada año, escriba una expresión para el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizará? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función de los años. Use su gráfica para determinar el momento en que el reciclado se triplica.

34. Crecimiento poblacional En la actualidad, las ciudades A y B tienen poblaciones de 70 000 y 60 000 habitantes, respectivamente. La ciudad A crece a razón de 4% anual y la de B a razón de 5% anual. Determine la diferencia entre las poblaciones al final de cinco años. Dé su respuesta al entero más cercano.

Los problemas 35 y 36 involucran una población que declina. Si una población disminuye a una tasa de r por periodo, entonces la población P después de t periodos está dada por

$$P = P_0(1 - r)t$$

donde P_0 es la población inicial (la población cuando $t = 0$).

*35. **Población** A causa de una recesión económica, la población de cierta área urbana disminuye a razón de 1.5% anual. Al inicio había 350 000 habitantes. ¿Cuántos habrá después de tres años? Dé su respuesta al entero más cercano.

36. Inscripciones Después de un cuidadoso análisis demográfico, una universidad pronostica que las inscripciones de estudiantes se reducirán a una tasa de 3% anual durante los próximos 12 años. Si en la actualidad se cuentan 14 000 estudiantes, ¿cuántos habrá dentro de 12 años?

En los problemas 37 a 40, utilice una calculadora para encontrar el valor (redondeado a cuatro decimales) de cada expresión.

37. $e^{1.5}$ **38.** $e^{3.4}$

39. $e^{-0.7}$ **40.** $e^{-2/3}$

En los problemas 41 y 42 grafique las funciones.

41. $y = -e^{-(x+1)}$ **42.** $y = 2e^x$

43. Llamadas telefónicas La probabilidad de que un operador de teléfonos reciba exactamente x llamadas durante cierto periodo está dada por

$$P = \frac{e^{-3}3^x}{x!}$$

Encuentre la probabilidad de que reciba exactamente tres llamadas. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

44. Distribución normal Una función importante utilizada en economía y decisiones de negocios es la *función de densidad de la distribución normal*, cuya forma estándar es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\frac{1}{2})x^2}$$

Evalúe $f(0)$, $f(-1)$ y $f(1)$. Redondee sus respuestas a tres decimales.

45. Exprese e^{kt} en la forma b^t.

46. Exprese $\frac{1}{e^x}$ en la forma b^x.

*47. **Decaimiento radiactivo** En el caso de cierto elemento radiactivo, se conservan N gramos de elemento después de t horas, donde

$$N = 12e^{-0.031t}$$

(a) ¿Cuántos gramos están presentes inicialmente? (b) A la décima de gramo más cercana, ¿cuántos gramos permanecen después de 10 horas? (c) ¿Y de 44 horas? (d) Con base en su respuesta al inciso (c), ¿cuál es su estimación de la vida media del elemento?

48. Decaimiento radiactivo A un cierto tiempo hay 75 miligramos de una sustancia radiactiva, la cual decae de modo que después de t años el número de miligramos presentes, N, está dado por

$$N = 75e^{-0.045t}$$

¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 años? Dé su respuesta al miligramo más cercano.

49. Decaimiento radiactivo Si una sustancia radiactiva tiene una vida media de 8 años, ¿en cuánto tiempo un gramo alcanza $\frac{1}{16}$ de gramo?

50. Mercadotecnia Una compañía de ventas por correo se anuncia en una revista nacional. La compañía determina que de todas las ciudades pequeñas, el porcentaje (dado como un decimal) en el que exactamente x personas respondan a un anuncio se ajusta a una distribución de Poisson, donde $\mu = 0.5$. ¿En qué porcentaje de ciudades pequeñas puede la compañía esperar que exactamente dos personas respondan? Redondee su respuesta a cuatro decimales.

51. Admisión en la sala de emergencias Suponga que el número de pacientes admitidos en la sala de emergencias de un hospital durante cierta hora del día tiene una distribución de Poisson donde la media es 4. Encuentre la probabilidad de que haya exactamente dos pacientes de urgencia durante esa hora. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

52. Grafique $y = 17^x$ y $y = \left(\frac{1}{17}\right)^x$ en la misma pantalla. Determine el punto de intersección.

53. Sea a una constante mayor que 0. Grafique $y = 2^x$ y $y = 2^a \cdot 2^x$ en la misma pantalla, para valores constantes $a = 2$ y $a = 3$. Parece que la gráfica de $y = 2^a \cdot 2^x$ es la gráfica de $y = 2^x$ recorrida a unidades a la izquierda. Pruebe algebraicamente que esto es cierto.

54. Para $y = 7^x$, encuentre x si $y = 4$. Redondee su respuesta a dos decimales.

55. Para $y = 2^x$, determine x si $y = 9$. Redondee su respuesta a dos decimales.

56. Crecimiento de células El número de células de un cultivo se incrementa a razón de 7% por hora. Al inicio están presentes 1000 células. ¿Después de cuántas horas completas habrá al menos 3000?

57. Crecimiento de bacterias De acuerdo con el ejemplo 1, ¿en cuánto tiempo existirán 1000 bacterias? Redondee su respuesta a la décima de minuto más cercana.

58. Ecuación de demanda La ecuación de demanda para un juguete nuevo es

$$q = 10\,000(0.95123)^p$$

(a) Evalúe q al entero más cercano cuando $p = 10$.

(b) Convierta la ecuación de demanda a la forma

$$q = 10\,000e^{-xp}$$

(*Una pista:* Encuentre un número x tal que $0.95123 \approx e^{-x}$.)

(c) Utilice la ecuación del inciso (b) para evaluar q al entero más cercano cuando $p = 10$. Sus respuestas en los incisos (a) y (c) deben ser iguales.

59. Inversión Si se invierten \$2500 en una cuenta de ahorros que genera interés a 4.3% compuesto anualmente, ¿después de cuántos años completos la cantidad al menos se duplicará?

OBJETIVO

Introducir las funciones logarítmicas y sus gráficas. Las propiedades de los logaritmos se estudiarán en la sección 6.3.

6.2 Funciones logarítmicas

Debido a que todas las funciones exponenciales pasan la prueba de la recta horizontal, todas son funciones uno a uno. De esto se deduce que cada función exponencial tiene una inversa. Dichas funciones inversas a las funciones exponenciales se llaman *funciones logarítmicas*.

De manera más precisa, si $f(x) = b^x$, la función exponencial base b (donde $0 < b < 1$ o $1 < b$), entonces la función inversa $f^{-1}(x)$ se llama la *función logarítmica base b* y se denota $\log_b x$. Esto surge de las observaciones generales acerca de las funciones inversas expuestas en la sección 3.4:

APUNTADOR Para repasar las funciones inversas, vaya a la sección 3.4.

$$y = \log_b x \qquad \text{si y sólo si} \qquad b^y = x$$

y se tienen las siguientes ecuaciones fundamentales:

$$\log_b b^x = x \tag{1}$$

y

$$b^{\log_b x} = x \tag{2}$$

donde la ecuación (1) se aplica para toda x en $(-\infty, \infty)$ —que es el dominio de la función exponencial base b— y la ecuación (2) se aplica para toda x en el rango de la función exponencial base b —que es $(0, \infty)$ y necesariamente el dominio de la función logarítmica base b—. Dicho de otra forma, dada x positiva, $\log_b x$ es el número único con la propiedad de que $b^{\log_b x} = x$. Las generalidades sobre las funciones inversas también permiten ver de inmediato cómo se ve una función logarítmica.

En la figura 6.16 se muestra la gráfica de la función exponencial particular $y = f(x) = 2^x$, cuya forma general es típica de las funciones exponenciales $y = b^x$ para la cual la base b satisface $1 < b$. Se ha agregado una copia (punteada) de la recta $y = x$. La gráfica de $y = f^{-1}(x) = \log_2 x$ se obtiene como la imagen de espejo de $y = f(x) = 2^x$ en la línea $y = x$.

En la tabla 6.3 se han tabulado los valores de la función que aparece como las coordenadas y de los puntos en la figura 6.16.

TABLA 6.3 Valores seleccionados de la función

x	2^x	x	$\log_2 x$
−2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	−2
−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

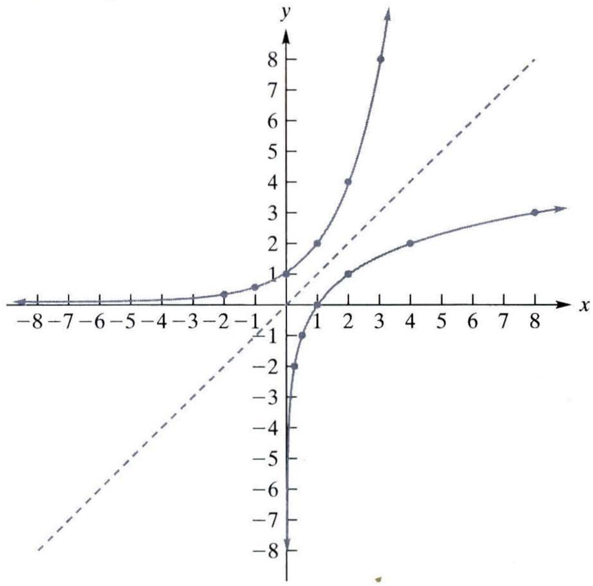


FIGURA 6.16 Gráficas de $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$.

Resulta claro que la función exponencial base 2 y la función logarítmica base 2 "deshacen" sus efectos entre sí. Por lo tanto, para toda x en el dominio de 2^x, [que es $(-\infty, \infty)$], se tiene

$$\log_2 2^x = x$$

y, para toda x en el dominio de $\log_2 x$ [que es el rango de 2^x, el cual es $(0, \infty)$], se tiene

$$2^{\log_2 x} = x$$

Formas logarítmica
y exponencial

Logaritmo	Exponente
$\downarrow$	$\downarrow$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\uparrow$	$\uparrow$
base	base

FIGURA 6.17 Un logaritmo puede considerarse un exponente.

No puede decirse muy a menudo que

$$y = \log_b x \quad \text{significa} \quad b^y = x$$

y viceversa

$$b^y = x \quad \text{significa} \quad y = \log_b x$$

En este sentido, el *logaritmo de un número es un exponente:* $\log_b x$ es la potencia a la cual debe elevarse b para obtener x. Por ejemplo,

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{porque} \quad 2^3 = 8$$

Se dice que $\log_2 8 = 3$ es la **forma logarítmica** de la **forma exponencial** $2^3 = 8$. (Vea la figura 6.17.)

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

CONVERSIÓN DE FORMA EXPONENCIAL A FORMA LOGARÍTMICA

Si ciertas bacterias se han estado duplicando cada hora, y la cantidad actual es 16 veces la cantidad que se midió al inicio, entonces la situación puede representarse por $16 = 2^t$. Exprese esta ecuación en forma logarítmica. ¿Qué significa t?

EJEMPLO 1 Conversión de forma exponencial a forma logarítmica

	Forma exponencial		*Forma logarítmica*
a. Como	$5^2 = 25$	se concluye que	$\log_5 25 = 2$
b. Como	$3^4 = 81$	se concluye que	$\log_3 81 = 4$
c. Como	$10^0 = 1$	se concluye que	$\log_{10} 1 = 0$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

CONVERSIÓN DE FORMA LOGARÍTMICA A EXPONENCIAL

Un terremoto que alcanzó 8.3 en la escala Richter puede representarse mediante $8.3 = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del sismo e I_0 es la intensidad de un sismo de nivel cero. Represente esta ecuación en forma exponencial.

EJEMPLO 2 Conversión de forma logarítmica a forma exponencial

Forma logarítmica		*Forma exponencial*
a. $\log_{10} 1000 = 3$	significa	$10^3 = 1000$
b. $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	significa	$64^{1/2} = 8$
c. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$	significa	$2^{-4} = \frac{1}{16}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA CON $b > 1$

Suponga que una planta de reciclado sabe que la cantidad de material que se reciclará ha aumentado un 50% cada año, desde su primer año de operación. Haga la gráfica de cada año como una función del aumento multiplicativo en el reciclado desde el primer año. Etiquete la gráfica con el nombre de la función.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función logarítmica con $b > 1$

Examine de nuevo la gráfica de $y = \log_2 x$ de la figura 6.16. Es típica para una función logarítmica con $b > 1$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA CON $0 < b < 1$

Suponga que un bote se deprecia 20% cada año. Haga la gráfica del número de años que cierto propietario conserva el bote como una función de la disminución multiplicativa de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función logarítmica con $0 < b < 1$

Grafique $y = \log_{1/2} x$.

Solución: Para graficar los puntos se usa la forma exponencial equivalente $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y se refleja la gráfica en la recta $y = x$.

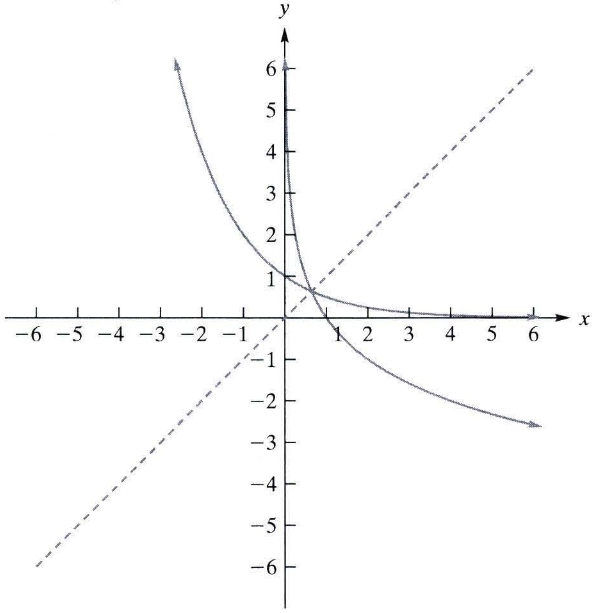


FIGURA 6.18 Gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \log_{1/2} x$.

A partir de la gráfica, puede verse que el dominio de $y = \log_{1/2} x$ está conformado por el conjunto de todos los números reales positivos, que es el rango de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, y el rango de $y = \log_{1/2} x$ consiste en todos los números reales, que a su vez es el dominio de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. La gráfica desciende de izquierda a derecha. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos base $\frac{1}{2}$ positivos y, entre más cerca estén del 0, mayor es su logaritmo base $\frac{1}{2}$. Los números mayores que 1 tienen logaritmos base $\frac{1}{2}$ negativos. El logaritmo de 1 es 0, *sin importar la base b*, y corresponde a la intersección x $(1, 0)$. Esta gráfica es representativa para una función logarítmica con $0 < b < 1$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

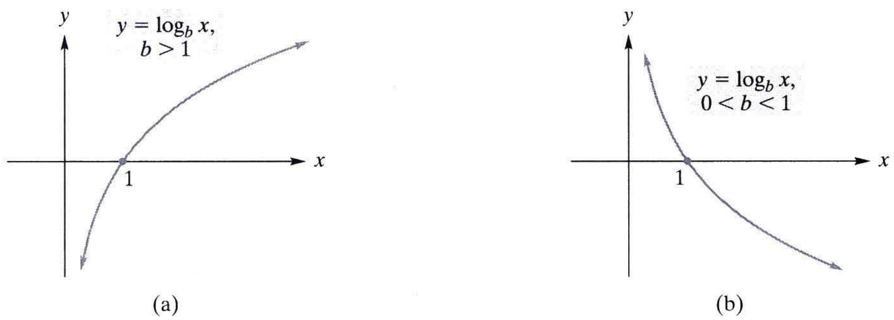


FIGURA 6.19 Formas generales de $y = \log_b x$.

Para resumir los resultados de los ejemplos 3 y 4, puede decirse que la gráfica de una función logarítmica tiene una de dos formas generales, dependiendo si $b > 1$ o si $0 < b < 1$ (vea la figura 6.19). Para $b > 1$ la gráfica asciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a 0, los valores de la función disminuyen indefinidamente y la gráfica se hace cada vez más próxima al eje y. Para $0 < b < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a 0, los valores de la función crecen indefinidamente y la gráfica se acerca al eje y. En cada caso observe que:

1. El dominio de una función logarítmica es el intervalo $(0, \infty)$. Esto es, no existe logaritmo de números negativos ni del 0.

2. El rango es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
3. El logaritmo de 1 es 0, que corresponde a la intersección x $(1, 0)$.

Debe familiarizarse con la gráfica del logaritmo natural de la figura 6.20.

Los logaritmos de base 10 son llamados **logaritmos comunes**. Se utilizaban con frecuencia para propósitos de cómputo antes de la época de las calculadoras. En general, se omite el subíndice 10 de la notación:

$$\log x \quad \text{significa} \quad \log_{10} x$$

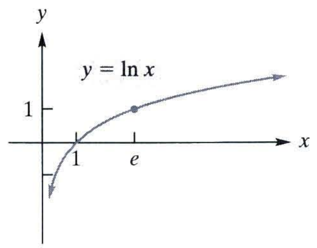


FIGURA 6.20 Gráfica de la función logaritmo natural.

Los logaritmos de base e son importantes en el cálculo y se conocen como **logaritmos naturales**. Para tales logaritmos se usa la notación "ln":

$$\ln x \quad \text{significa} \quad \log_e x$$

El símbolo $\ln x$ puede leerse "logaritmo natural de x". Su calculadora da valores aproximados para los logaritmos naturales y comunes. Por ejemplo, verifique que $\ln 2 \approx 0.69315$. Esto significa que $e^{0.69315} \approx 2$. La figura 6.20 muestra la gráfica de $y = \ln x$. Como $e > 1$, la gráfica tiene la forma general de una función logarítmica donde $b > 1$ [vea la figura 6.19(a)] y asciende de izquierda a derecha. Aunque están bien establecidas las convenciones acerca de log, sin subíndice, y ln en los libros elementales, debe tener cuidado al leer textos avanzados. En ese tipo de libros, por lo general $\log x$ significa $\log_e x$, y ln no se utiliza, además los logaritmos base 10 se escriben de manera explícita como $\log_{10} x$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

CÁLCULO DE LOGARITMOS

El número de años que necesita una cantidad invertida a una tasa anual de r, compuesta de manera continua, para cuadruplicar su valor es una función de la tasa anual r, dada por $t(r) = \frac{\ln 4}{r}$. Use una calculadora para encontrar la tasa necesaria para cuadruplicar una inversión en 10 años.

EJEMPLO 5 Cálculo de logaritmos

a. *Encuentre* log 100.

Solución: Aquí la base es 10. Así que log 100 es el exponente al que debe elevarse 10 para obtener 100. Como $10^2 = 100$, $\log 100 = 2$.

b. *Encuentre* ln 1.

Solución: Aquí la base es e. Como $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$.

c. *Encuentre* log 0.1.

Solución: Como $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $\log 0.1 = -1$.

Recuerde la manera en la que un logaritmo se convierte en un exponente.

d. *Encuentre* $\ln e^{-1}$.

Solución: Como $\ln e^{-1}$ es el exponente al que debe elevarse e para obtener e^{-1}, es claro que $\ln e^{-1} = -1$.

e. *Encuentre* $\log_{36} 6$.

Solución: Como $36^{1/2}$ $(= \sqrt{36})$ es 6, $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Muchas ecuaciones que incluyen formas logarítmica o exponencial, pueden resolverse para una cantidad desconocida transformando primero de la forma logarítmica a la exponencial o viceversa. El ejemplo 6 ilustra esta acción.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

El aumento multiplicativo m de un monto invertido a una tasa anual de r, capitalizable de manera continua durante un tiempo t está dado por $m = e^{rt}$. ¿Qué tasa anual es necesaria para triplicar la inversión en 12 años?

EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

a. *Resuelva* $\log_2 x = 4$.

Solución: Puede obtenerse una expresión explícita para x al escribir la ecuación en forma exponencial. Resulta

$$2^4 = x$$

de modo que $x = 16$.

b. *Resuelva* $\ln(x + 1) = 7$.

Solución: De la forma exponencial resulta $e^7 = x + 1$. Así, $x = e^7 - 1$.

c. *Resuelva* $\log_x 49 = 2$.

Solución: En la forma exponencial, $x^2 = 49$, de modo que $x = 7$. Se rechaza $x = -7$, porque un número negativo no puede ser una base de una función logarítmica.

d. *Resuelva* $e^{5x} = 4$.

Solución: Puede obtenerse una expresión explícita para x al escribir la ecuación en forma logarítmica. Se tiene

$$\ln 4 = 5x$$
$$x = \frac{\ln 4}{5}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49

Decaimiento radiactivo y vida media

A partir del estudio de decaimiento de un elemento radiactivo de la sección 6.1, se sabe que la cantidad presente en el instante t está dada por

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{3}$$

donde N_0 es la cantidad inicial (la cantidad en el instante $t = 0$) y λ es la constante de decaimiento. Ahora se determinará la vida media T del elemento. En el instante T, se encuentra presente la mitad de la cantidad inicial. Esto es, cuando $t = T$, $N = N_0/2$. Así, de la ecuación (3), se tiene

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$$

Al resolver para T, se obtiene

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$$
$$2 = e^{\lambda T} \qquad \text{(al tomar recíprocos de ambos lados)}$$

Para obtener una expresión explícita para T, se convierte a la forma logarítmica. Esto resulta en

$$\lambda T = \ln 2$$
$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Para resumir, se tiene lo siguiente:

Si un elemento radiactivo tiene una constante de decaimiento λ, entonces la vida media T del elemento está dada por

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \tag{4}$$

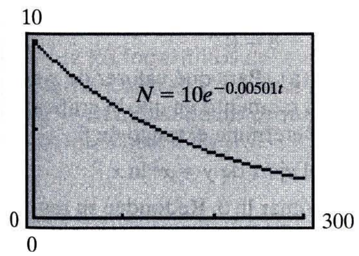


FIGURA 6.21 Función de decaimiento radiactivo $N = 10e^{-0.00501t}$.

EJEMPLO 7 Determinación de la vida media

Una muestra de 10 miligramos de polonio radiactivo 210 (que se denota por ^{210}Po) *decae de acuerdo con la ecuación*

$$N = 10e^{-0.00501t}$$

donde N es el número de miligramos presentes después de t días (vea la figura 6.21). Determine la vida media del ^{210}Po.

Solución: Aquí la constante de decaimiento λ es 0.00501. Por la ecuación (4), la vida media está dada por:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0.00501} \approx 138.4 \text{ días}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 63

Problemas 6.2

En los problemas 1 a 8, exprese cada forma logarítmica de manera exponencial y cada forma exponencial de manera logarítmica.

*1. $10^4 = 10\,000$
2. $2 = \log_{12} 144$
*3. $\log_2 64 = 6$
4. $8^{2/3} = 4$
5. $e^3 = 20.0855$
6. $e^{0.33647} = 1.4$
7. $\ln 3 = 1.09861$
8. $\log 5 = 0.6990$

En los problemas 9 a 16, grafique las funciones.

*9. $y = f(x) = \log_3 x$
10. $y = f(x) = \log_4 2x$
*11. $y = f(x) = \log_{1/4} x$
12. $y = f(x) = \log_{1/5} x$
13. $y = f(x) = \log_2 (x - 4)$
14. $y = f(x) = \log_2 (-x)$
15. $y = f(x) = -2 \ln x$
16. $y = f(x) = \ln(x + 2)$

En los problemas 17 a 28, evalúe la expresión.

17. $\log_6 36$
18. $\log_2 64$
19. $\log_3 27$
20. $\log_{16} 4$
21. $\log_7 7$
22. $\log 10\,000$
23. $\log 0.01$
24. $\log_2 \sqrt[3]{2}$
25. $\log_5 1$
26. $\log_5 \frac{1}{25}$
27. $\log_2 \frac{1}{8}$
28. $\log_4 \sqrt[5]{4}$

Encuentre x en los problemas 29 a 48.

29. $\log_3 x = 4$
30. $\log_2 x = 8$
31. $\log_5 x = 3$
32. $\log_4 x = 0$
33. $\log x = -1$
34. $\ln x = 1$
35. $\ln x = -3$
36. $\log_x 25 = 2$
37. $\log_x 8 = 3$
38. $\log_x 3 = \frac{1}{2}$
39. $\log_x \frac{1}{6} = -1$
40. $\log_x y = 1$
41. $\log_3 x = -3$
42. $\log_x(2x - 3) = 1$
43. $\log_x(6 - x) = 2$
44. $\log_8 64 = x - 1$
45. $2 + \log_2 4 = 3x - 1$
46. $\log_3(x + 2) = -2$
47. $\log_x(2x + 8) = 2$
48. $\log_x(6 + 4x - x^2) = 2$

Encuentre x en los problemas 49 a 52 además exprese su respuesta en términos de logaritmos naturales.

*49. $e^{3x} = 2$
50. $0.1e^{0.1x} = 0.5$
51. $e^{2x-5} + 1 = 4$
52. $6e^{2x} - 1 = \frac{1}{2}$

En los problemas 53 a 56, utilice su calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión. Redondee su respuesta a cinco decimales.

53. $\ln 5$
54. $\ln 4.27$
55. $\ln 7.39$
56. $\ln 9.98$

57. **Apreciación** Suponga que una antigüedad incrementa su valor en 10% cada año. Haga una gráfica del número de años que cierto propietario la conserva como una función del aumento multiplicativo de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

58. **Ecuación de costo** Para una compañía, el costo por producir q unidades de un producto está dado por la ecuación
$$c = (3q \ln q) + 12$$
Evalúe el costo cuando $q = 6$. (Redondee su respuesta a dos decimales.)

59. **Ecuación de oferta** La ecuación de oferta de un fabricante es
$$p = \log\left(10 + \frac{q}{2}\right)$$
donde q es el número de unidades ofrecidas al precio unitario p. ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

60. **Terremoto** La magnitud, M, de un terremoto y su energía, E, están relacionadas por la ecuación[5]
$$1.5M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right)$$
donde M está dada en términos de la escala preferencial de Richter de 1958 y E se encuentra en ergios. Resuelva la ecuación para E.

61. **Biología** Para cierta población de células, el número de ellas en el instante t está dado por $N = N_0(2^{t/k})$, donde N_0 es el número de células en $t = 0$ y k es una constante positiva. (a) Encuentre N cuando $t = k$. (b) ¿Cuál es el significado de k? (c) Demuestre que el tiempo necesario para tener una población de N_1 puede escribirse como
$$t = k \log_2 \frac{N_1}{N_0}$$

62. **Bienes secundarios** En un análisis de bienes secundarios, Persky[6] resuelve una ecuación de la forma
$$u_0 = A \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$
para x_1, donde x_1 y x_2 son cantidades de dos productos, u_0 es una medida de la utilidad y A es una constante positiva. Determine x_1.

*63. **Decaimiento radiactivo** Una muestra de 1 gramo de plomo 211 radiactivo (^{211}Pb) decae de acuerdo con la ecuación $N = e^{-0.01920t}$, donde N es el número de gramos presentes después de t minutos. Encuentre la vida media del ^{211}Pb a la décima de minuto más cercana.

64. **Decaimiento radiactivo** Una muestra de 100 miligramos de actinio 277 radiactivo (^{227}Ac) decae de acuerdo con la ecuación
$$N = 100e^{-0.03194t}$$
donde N es el número de miligramos presentes después de t años. Encuentre la vida media del ^{227}Ac a la décima de año más cercana.

65. Si $\log_y x = 3$ y $\log_z x = 2$, encuentre una fórmula para z como una función explícita que dependa sólo de y.

66. Despeje y como una función explícita de x si
$$x + 3e^{2y} - 8 = 0$$

67. Suponga que $y = f(x) = x \ln x$. (a) ¿Para qué valores de x es $y < 0$? (*Una pista:* Determine el momento en que la gráfica está por debajo del eje x.) (b) Determine el rango de f.

68. Encuentre la intersección con el eje x de $y = x^2 \ln x$.

69. Use la gráfica de $y = e^x$ para estimar $\ln 3$. Redondee su respuesta a dos decimales.

70. Utilice la gráfica de $y = \ln x$ para estimar e^2. Redondee su respuesta a dos decimales.

71. Determine los valores en x de los puntos de intersección de las gráficas de $y = (x - 2)^2$ y $y = \ln x$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

[5] K. E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge, Reino Unido: Cambridge at the University Press, 1963).
[6] A. L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map", *The American Economist*, XXIX, núm. 1 (primavera de 1985).

OBJETIVO

Estudiar las propiedades básicas de las funciones logarítmicas.

6.3 Propiedades de los logaritmos

La función logarítmica tiene muchas propiedades importantes. Por ejemplo,

1. $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$

que dice que el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de esos números. Esta propiedad puede probarse al derivar la forma exponencial de la ecuación:

$$b^{\log_b m + \log_b n} = mn$$

Si se usa primero una regla conocida para los exponentes, se tiene

$$\begin{aligned} b^{\log_b m + \log_b n} &= b^{\log_b m} b^{\log_b n} \\ &= mn \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad usa dos instancias de la ecuación fundamental (2) de la sección 6.2. Las dos propiedades siguientes no se probarán, porque sus demostraciones son similares a la de la propiedad 1.

ADVERTENCIA

Asegúrese de que entiende claramente las propiedades 1, 2 y 3, las cuales no se aplican al logaritmo de una suma $[\log_b(m + n)]$, al logaritmo de una diferencia $[\log_b(m - n)]$, al producto de dos logaritmos $[(\log_b m)(\log_b n)]$, ni a la división de dos logaritmos $\left[\dfrac{\log_b m}{\log_b n}\right]$.

2. $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

Es decir, el logaritmo de una división es la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

3. $\log_b m^r = r \log_b m$

Es decir, el logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

En la tabla 6.4 se proporcionan los valores de algunos logaritmos comunes. La mayoría de las entradas son aproximadas. Por ejemplo, $\log 4 \approx 0.6021$, que significa $100^{0.6021} \approx 4$. Para ilustrar el uso de las propiedades de los logaritmos, se usará esta tabla en algunos de los ejemplos siguientes.

TABLA 6.4 Logaritmos comunes

x	$\log x$	x	$\log x$
2	0.3010	7	0.8451
3	0.4771	8	0.9031
4	0.6021	9	0.9542
5	0.6990	10	1.0000
6	0.7782	e	0.4343

Aunque los logaritmos del ejemplo 1 pueden encontrarse con una calculadora, se hará uso de las propiedades de los logaritmos.

EJEMPLO 1 Determinación de logaritmos con el uso de la tabla 6.4

a. *Encuentre* log 56.

Solución: log 56 no está en la tabla. Pero puede escribirse 56 como el producto de $8 \cdot 7$. Así, por la propiedad 1,

$$\log 56 = \log(8 \cdot 7) = \log 8 + \log 7 \approx 0.9031 + 0.8451 = 1.7482$$

b. *Encuentre* $\log \frac{9}{2}$.

Solución: Por la propiedad 2,

$$\log \frac{9}{2} = \log 9 - \log 2 \approx 0.9542 - 0.3010 = 0.6532$$

c. *Encuentre* log 64.

Solución: Como $64 = 8^2$, por la propiedad 3,

$$\log 64 = \log 8^2 = 2 \log 8 \approx 2(0.9031) = 1.8062$$

d. *Encuentre* $\sqrt{5}$.

Solución: Por la propiedad 3, se tiene

$$\log \sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \frac{1}{2} \log 5 \approx \frac{1}{2}(0.6990) = 0.3495$$

e. *Encuentre* $\log \frac{16}{21}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{16}{21} &= \log 16 - \log 21 = \log(4^2) - \log(3 \cdot 7) \\ &= 2\ \log 4 - [\log 3 + \log 7] \\ &\approx 2(0.6021) - [0.4771 + 0.8451] = -0.1180\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

EJEMPLO 2 Reescritura de expresiones logarítmicas

a. *Exprese* $\log \frac{1}{x^2}$ *en términos de* $\log x$.

Solución:

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x \qquad \text{(Propiedad 3)}$$

Aquí se ha supuesto que $x > 0$. Aunque $\log(1/x^2)$ está definido para $x \neq 0$, la expresión $-2 \log x$ sólo está definida si $x > 0$. Observe que se tiene

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log |x|$$

para toda $x \neq 0$.

b. *Exprese* $\log \frac{1}{x}$ *en términos de* $\log x$, para $x > 0$.

Solución: Por la propiedad 3,

$$\log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -1 \log x = -\log x$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

Del ejemplo 2(b), se observa que $\log(1/x) = -\log x$. Si se generaliza se obtiene la propiedad siguiente:

> **4.** $\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m$
>
> **Es decir, el logaritmo del recíproco de un número es el negativo del logaritmo del número.**

Por ejemplo, $\log \frac{2}{3} = -\log \frac{3}{2}$.

EJEMPLO 3 Escritura de logaritmos en términos de logaritmos más simples

Las manipulaciones como las del ejemplo 3 se utilizan con frecuencia en cálculo.

a. *Escriba* $\ln \frac{x}{zw}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln z$ *y* $\ln w$.

Solución:

$$\begin{aligned}\ln \frac{x}{zw} &= \ln x - \ln(zw) && \text{(Propiedad 2)} \\ &= \ln x - (\ln z + \ln w) && \text{(Propiedad 1)} \\ &= \ln x - \ln z - \ln w\end{aligned}$$

b. *Escriba* $\ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln(x-2)$ *y* $\ln(x-3)$.

Solución:

$$\ln\sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}} = \ln\left[\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}\right]^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}$$
$$= \frac{1}{3}\{\ln[x^5(x-2)^8] - \ln(x-3)\}$$
$$= \frac{1}{3}[\ln x^5 + \ln(x-2)^8 - \ln(x-3)]$$
$$= \frac{1}{3}[5\ln x + 8\ln(x-2) - \ln(x-3)]$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

COMBINACIÓN DE LOGARITMOS

La medida en la escala de Richter de un terremoto está dada por $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. ¿Cuántas veces es mayor, en la escala de Richter, un terremoto con intensidad 900 000 veces la intensidad de un terremoto con nivel cero, que un terremoto con intensidad 9000 veces la intensidad de un terremoto de nivel cero? Escriba la respuesta como una expresión que incluya logaritmos. Simplifique la expresión por medio de reducción de logaritmos, y después evalúe la expresión resultante.

EJEMPLO 4 Combinación de logaritmos

a. *Escriba* $\ln x - \ln(x+3)$ *como un solo logaritmo.*

Solución:

$$\ln x - \ln(x+3) = \ln\frac{x}{x+3} \qquad \text{(Propiedad 2)}$$

b. *Escriba* $\ln x + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4$ *como un solo logaritmo.*

Solución:

$$\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4$$
$$= \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - \ln(4^2) \qquad \text{(Propiedad 3)}$$
$$= \ln 3 + \ln 7 - [\ln 2 + \ln(4^2)]$$
$$= \ln(3\cdot 7) - \ln(2\cdot 4^2) \qquad \text{(Propiedad 1)}$$
$$= \ln 21 - \ln 32$$
$$= \ln\frac{21}{32} \qquad \text{(Propiedad 2)}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

Como $b^0 = 1$ y $b^1 = b$, al convertir a formas logarítmicas se tienen las propiedades siguientes:

5. $\log_b 1 = 0$
6. $\log_b b = 1$

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES LOGARÍTMICAS

Si un terremoto es 10 000 veces más intenso como un terremoto de nivel cero, ¿cuál es su medida en la escala de Richter? Escriba la respuesta como una expresión logarítmica y simplifíquela. (Para obtener la fórmula, vea Principios en práctica 1.)

EJEMPLO 5 Simplificación de expresiones logarítmicas

a. *Encuentre* $\ln e^{3x}$.

Solución: Por la ecuación fundamental (1) expuesta en la sección 6.2, donde $b = e$, se tiene $\ln e^{3x} = 3x$.

b. *Encuentre* $\log 1 + \log 1000$.

Solución: Por la propiedad 5, $\log 1 = 0$. Por lo tanto,

$$\log 1 + \log 1000 = 0 + \log 10^3$$
$$= 0 + 3 \qquad \text{(Ecuación fundamental (1) de la sección 6.2 donde } b = 10)$$
$$= 3$$

c. *Encuentre* $\log_7 \sqrt[9]{7^8}$.

Solución:

$$\log_7 \sqrt[9]{7^8} = \log_7 7^{8/9} = \frac{8}{9}$$

e. *Encuentre* $\log \frac{16}{21}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{16}{21} &= \log 16 - \log 21 = \log(4^2) - \log(3 \cdot 7)\\ &= 2\ \log 4 - [\log 3 + \log 7]\\ &\approx 2(0.6021) - [0.4771 + 0.8451] = -0.1180\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

EJEMPLO 2 Reescritura de expresiones logarítmicas

a. *Exprese* $\log \frac{1}{x^2}$ *en términos de* $\log x$.

Solución:

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x \qquad \text{(Propiedad 3)}$$

Aquí se ha supuesto que $x > 0$. Aunque $\log(1/x^2)$ está definido para $x \neq 0$, la expresión $-2 \log x$ sólo está definida si $x > 0$. Observe que se tiene

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log |x|$$

para toda $x \neq 0$.

b. *Exprese* $\log \frac{1}{x}$ *en términos de* $\log x$, para $x > 0$.

Solución: Por la propiedad 3,

$$\log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -1 \log x = -\log x$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

Del ejemplo 2(b), se observa que $\log(1/x) = -\log x$. Si se generaliza se obtiene la propiedad siguiente:

4. $\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m$

Es decir, el logaritmo del recíproco de un número es el negativo del logaritmo del número.

Por ejemplo, $\log \frac{2}{3} = -\log \frac{3}{2}$.

EJEMPLO 3 Escritura de logaritmos en términos de logaritmos más simples

Las manipulaciones como las del ejemplo 3 se utilizan con frecuencia en cálculo.

a. *Escriba* $\ln \frac{x}{zw}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln z$ *y* $\ln w$.

Solución:

$$\begin{aligned}\ln \frac{x}{zw} &= \ln x - \ln(zw) && \text{(Propiedad 2)}\\ &= \ln x - (\ln z + \ln w) && \text{(Propiedad 1)}\\ &= \ln x - \ln z - \ln w\end{aligned}$$

b. *Escriba* $\ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln(x-2)$ *y* $\ln(x-3)$.

Solución:

$$\ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}} = \ln\left[\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}\right]^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}$$
$$= \frac{1}{3}\{\ln[x^5(x-2)^8] - \ln(x-3)\}$$
$$= \frac{1}{3}[\ln x^5 + \ln(x-2)^8 - \ln(x-3)]$$
$$= \frac{1}{3}[5\ln x + 8\ln(x-2) - \ln(x-3)]$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

COMBINACIÓN DE LOGARITMOS

La medida en la escala de Richter de un terremoto está dada por $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. ¿Cuántas veces es mayor, en la escala de Richter, un terremoto con intensidad 900 000 veces la intensidad de un terremoto con nivel cero, que un terremoto con intensidad 9000 veces la intensidad de un terremoto de nivel cero? Escriba la respuesta como una expresión que incluya logaritmos. Simplifique la expresión por medio de reducción de logaritmos, y después evalúe la expresión resultante.

EJEMPLO 4 Combinación de logaritmos

a. *Escriba* $\ln x - \ln(x+3)$ *como un solo logaritmo.*

Solución:

$$\ln x - \ln(x+3) = \ln\frac{x}{x+3} \qquad \text{(Propiedad 2)}$$

b. *Escriba* $\ln x + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4$ *como un solo logaritmo.*

Solución:

$$\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4$$
$$= \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - \ln(4^2) \qquad \text{(Propiedad 3)}$$
$$= \ln 3 + \ln 7 - [\ln 2 + \ln(4^2)]$$
$$= \ln(3\cdot 7) - \ln(2\cdot 4^2) \qquad \text{(Propiedad 1)}$$
$$= \ln 21 - \ln 32$$
$$= \ln\frac{21}{32} \qquad \text{(Propiedad 2)}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

Como $b^0 = 1$ y $b^1 = b$, al convertir a formas logarítmicas se tienen las propiedades siguientes:

5. $\log_b 1 = 0$
6. $\log_b b = 1$

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES LOGARÍTMICAS

Si un terremoto es 10 000 veces más intenso como un terremoto de nivel cero, ¿cuál es su medida en la escala de Richter? Escriba la respuesta como una expresión logarítmica y simplifíquela. (Para obtener la fórmula, vea Principios en práctica 1.)

EJEMPLO 5 Simplificación de expresiones logarítmicas

a. *Encuentre* $\ln e^{3x}$.

Solución: Por la ecuación fundamental (1) expuesta en la sección 6.2, donde $b = e$, se tiene $\ln e^{3x} = 3x$.

b. *Encuentre* $\log 1 + \log 1000$.

Solución: Por la propiedad 5, $\log 1 = 0$. Por lo tanto,

$$\log 1 + \log 1000 = 0 + \log 10^3$$
$$= 0 + 3 \qquad \text{(Ecuación fundamental (1) de la sección 6.2 donde } b = 10\text{)}$$
$$= 3$$

c. *Encuentre* $\log_7 \sqrt[9]{7^8}$.

Solución:

$$\log_7 \sqrt[9]{7^8} = \log_7 7^{8/9} = \frac{8}{9}$$

d. *Encuentre* $\log_3\left(\frac{27}{81}\right)$.

Solución:

$$\log_3\left(\frac{27}{81}\right) = \log_3\left(\frac{3^3}{3^4}\right) = \log_3(3^{-1}) = -1$$

e. *Encuentre* $\ln e + \log \frac{1}{10}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\ln e + \log \frac{1}{10} &= \ln e + \log 10^{-1}\\ &= 1 + (-1) = 0\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41

No confunda $\ln x^2$ con $(\ln x)^2$. Se tiene

$$\ln x^2 = \ln(x \cdot x)$$

pero

$$(\ln x)^2 = (\ln x)(\ln x)$$

Algunas veces $(\ln x)^2$ se escribe como $\ln^2 x$. Ésta no es una nueva fórmula, sino sólo una notación. De manera más general, algunas personas escriben $f^2(x)$ para $(f(x))^2$. Se recomienda evitar la notación $f^2(x)$.

EJEMPLO 6 Uso de la ecuación (2) de la sección 6.2

a. *Encuentre* $e^{\ln x^2}$.

Solución: Por (2), donde $b = e$, $e^{\ln x^2} = x^2$.

b. *Resuelva* $10^{\log x^2} = 25$ para x.

Solución:

$$\begin{aligned}10^{\log x^2} &= 25\\ x^2 &= 25 \quad \text{[Por la ecuación (2) de la sección 6.2]}\\ x &= \pm 5\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 45

EJEMPLO 7 Evaluación de logaritmos de base 5

Utilice una calculadora para encontrar $\log_5 2$.

Solución: Las calculadoras comunes tienen teclas para logaritmos de base 10 y de base e, pero no para base 5. Sin embargo, es posible convertir logaritmos de una base a otra. Ahora se convertirá de base 5 a base 10. Primero, se establece $x = \log_5 2$. Entonces $5^x = 2$. Al tomar los logaritmos comunes en ambos lados de $5^x = 2$, se obtiene

$$\begin{aligned}\log 5^x &= \log 2\\ x \log 5 &= \log 2\\ x &= \frac{\log 2}{\log 5} \approx 0.4307\end{aligned}$$

Si se hubieran tomado logaritmos naturales en ambos lados, el resultado sería $x = (\ln 2)/(\ln 5) \approx 0.4307$, igual que antes.

Si se generaliza el método utilizado en el ejemplo 7 se obtiene la llamada fórmula de *cambio de base*:

Fórmula de cambio de base

7. $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$

Algunos estudiantes opinan que la fórmula para el cambio de base es más fácil de recordar cuando se expresa en la forma

$$(\log_a b)(\log_b m) = \log_a m$$

en la cual aparentemente se cancelan las dos instancias de b. Ahora se verá cómo probar esta identidad, pues la capacidad de comprobar la verdad de dichos enunciados mejora la habilidad de usarlos en aplicaciones prácticas. Como $\log_a m = y$ precisamente si $a^y = m$, esta tarea es equivalente a mostrar que

$$a^{(\log_a b)(\log_b m)} = m$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} a^{(\log_a b)(\log_b m)} &= \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b m} \\ &= b^{\log_b m} \\ &= m \end{aligned}$$

si se usa una regla para exponentes y la ecuación fundamental (2) dos veces.

La fórmula de cambio de base permite la conversión de logaritmos de base b a base a.

EJEMPLO 8 Fórmula de cambio de base

Exprese $\log x$ *en términos de logaritmos naturales.*

Solución: Debe transformarse de base 10 a base e, por lo que se utiliza la fórmula de cambio de base (propiedad 7) donde $b = 10, m = x$ y $a = e$.

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49

TECNOLOGÍA

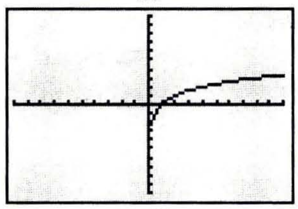
Problema: Despliegue la gráfica de $y = \log_2 x$.

Solución: Para introducir la función, primero se convierte a la base e o a la base 10. Se elige la base e. Por la propiedad 7,

$$y = \log_2 x = \frac{\log_e x}{\log_e 2} = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Ahora se grafica $y = (\ln x)/(\ln 2)$, que se muestra en la figura 6.22.

10

−10  10

−10

FIGURA 6.22 Gráfica de $y = \log_2 x$.

Problemas 6.3

En los problemas 1 a 10 se establece que $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ *y* $\log 5 = c$. *Exprese el logaritmo indicado en términos de a, b y c.*

1. $\log 30$ **2.** $\log 16$ **3.** $\log \frac{2}{3}$

4. $\log \frac{5}{2}$ **5.** $\log \frac{8}{3}$ **6.** $\log \frac{6}{25}$

7. $\log 36$ **8.** $\log 0.00003$ **9.** $\log_2 3$

10. $\log_3 5$

En los problemas 11 a 20, determine el valor de la expresión sin el uso de una calculadora.

11. $\log_7 7^{48}$ **12.** $\log_5(5\sqrt{5})^5$ **13.** $\log 0.0000001$

14. $10^{\log 3.4}$ **15.** $\ln e^{5.01}$ **16.** $\ln e$

17. $\ln \frac{1}{e^2}$ **18.** $\log_3 81$ **19.** $\log \frac{1}{10} + \ln e^3$

20. $e^{\ln \pi}$

En los problemas 21 a 32, escriba la expresión en términos de $\ln x$, $\ln(x+1)$ *y* $\ln(x+2)$.

21. $\ln(x(x+1)^2)$ **22.** $\ln \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

23. $\ln \frac{x^2}{(x+1)^3}$ **24.** $\ln(x(x+1))^3$

25. $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^4$

26. $\ln\sqrt{x(x+1)(x+2)}$

27. $\ln\frac{x}{(x+1)(x+2)}$

28. $\ln\frac{x^2(x+1)}{x+2}$

*29. $\ln\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2(x+2)^3}$

30. $\ln\frac{x}{(x+1)(x+2)}$

31. $\ln\left(\frac{1}{x+2}\sqrt[5]{\frac{x^2}{x+1}}\right)$

32. $\ln\sqrt[3]{\frac{x^3(x+2)^2}{(x+1)^3}}$

En los problemas 33 a 40, exprese cada una de las formas dadas como un solo logaritmo.

33. $\log 6 + \log 4$

34. $\log_3 10 - \log_3 5$

35. $\log_2(2x) - \log_2(x+1)$

36. $2\log x - \frac{1}{2}\log(x-2)$

*37. $5\log_2 10 + 2\log_2 13$

38. $5(2\log x + 3\log y - 2\log z)$

39. $2 + 10\log 1.05$

40. $\frac{1}{2}(\log 215 + 8\log 6 - 3\log 169)$

En los problemas 41 a 44, determine los valores de las expresiones sin utilizar una calculadora.

*41. $e^{4\ln 3 - 3\ln 4}$

42. $\log_2[\ln(\sqrt{5+e^2}+\sqrt{5}) + \ln(\sqrt{5+e^2}-\sqrt{5})]$

43. $\log_6 54 - \log_6 9$

44. $\log_3\sqrt{3} - \log_2\sqrt[3]{2} - \log_5\sqrt[4]{5}$

Encuentre x en los problemas 45 a 48.

*45. $e^{\ln(2x)} = 5$

46. $4^{\log_4 x + \log_4 2} = 3$

47. $10^{\log x^2} = 4$

48. $e^{3\ln x} = 8$

En los problemas 49 a 53, escriba cada expresión en términos de logaritmos naturales.

*49. $\log_2(2x+1)$

50. $\log_3(x^2+2x+2)$

51. $\log_3(x^2+1)$

52. $\log_5(9-x^2)$

53. Si $e^{\ln z} = 7e^y$, resuelva para y en términos de z.

54. Estadística En estadística, la ecuación de regresión $y = ab^x$ se reduce a una forma lineal tomando logaritmos en ambos lados. Exprese $\log y$ en términos de x, $\log a$ y $\log b$, y explique qué significa que la expresión resultante sea lineal.

55. Remuneración militar En un estudio de reclutamiento militar, Brown[7] considera la remuneración militar total C como la suma de la remuneración militar básica B (que incluye el valor de los gastos, las exenciones fiscales y el salario base) y las prestaciones de educación E. Así, $C = B + E$. Brown establece que

$$\ln C = \ln B + \ln\left(1 + \frac{E}{B}\right)$$

Verifíquelo.

56. Terremoto De acuerdo con Richter,[8] la magnitud M de un terremoto que ocurre a 100 km de cierto tipo de sismógrafo está dada por $M = \log(A) + 3$, donde A es la amplitud del trazo registrado (en milímetros) del terremoto. (a) Encuentre la magnitud de un terremoto que registra una amplitud de trazo de 10 mm. (b) Si un terremoto tiene amplitud A_1 y magnitud M_1, determine la magnitud de un temblor con amplitud $10A_1$ en términos de M_1.

57. Muestre la gráfica de $y = \log_6 x$.

58. Muestre la gráfica de $y = \log_4(x+2)$.

59. Muestre las gráficas de $y = \log x$ y $y = \frac{\ln x}{\ln 10}$ en la misma pantalla. Parecen ser idénticas. ¿Por qué?

60. En la misma pantalla, despliegue las gráficas de $y = \ln x$ y de $y = \ln(4x)$. Parece que la gráfica de $y = \ln(4x)$ es la de $y = \ln x$ recorrida hacia arriba. Determine de manera algebraica el valor de este corrimiento.

61. En la misma pantalla, exhiba las gráficas de $y = \ln(2x)$ y de $y = \ln(6x)$. Parece que la gráfica de $y = \ln(6x)$ es la de $y = \ln(2x)$ recorrida hacia arriba. Determine algebraicamente el valor de este corrimiento.

OBJETIVO

Desarrollar técnicas para la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

6.4 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Aquí se resolverán *ecuaciones logarítmicas* y *exponenciales*. Una **ecuación logarítmica** incluye al logaritmo de una expresión que contiene una incógnita. Por ejemplo, $2\ln(x + 4) = 5$ es una ecuación logarítmica. Por otro lado, en una **ecuación exponencial** la incógnita aparece en un exponente, como en $2^{3x} = 7$.

Para resolver algunas ecuaciones logarítmicas, es conveniente aprovechar el hecho de que para cualquier base b, la función $y = \log_b x$ es uno a uno. Por supuesto, esto significa que

$$\text{si} \quad \log_b m = \log_b n \quad \text{entonces} \quad m = n$$

Esto es evidente de manera visual al inspeccionar las dos formas posibles de $y = \log_b x$ que se dan en la figura 6.19. En cualquiera de los casos, es claro que la función pasa la prueba de la línea horizontal de la sección 3.5. Por otro lado, ya se ha observado que las funciones exponenciales $y = b^x$ son uno a uno, lo que significa que

$$\text{si} \quad b^m = b^n \quad \text{entonces} \quad m = n$$

[7]C. Brown, "Military Enlistments: What Can We Learn from Geographic Variation?", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 228-234.

[8]C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1958).

de manera que cada una tiene una inversa, a saber $y = \log_b x$, y como $(f^{-1})^{-1} = f$, cada función $y = \log_b x$ tiene una inversa y por lo tanto es uno a uno. Las ecuaciones fundamentales para las ecuaciones (1) y (2) de la sección 6.2 también resultan útiles para resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales (aquí se han hecho deliberadamente algunas repeticiones para revisar algunos fundamentos).

EJEMPLO 1 Composición de oxígeno

Se llevó a cabo un experimento con cierto tipo particular de animal de talla pequeña.[9] *En él se determinó el logaritmo de la cantidad de oxígeno consumido por hora para algunos de los animales, y se graficó contra los logaritmos de su peso. Se encontró que*

$$\log y = \log 5.934 + 0.885 \log x$$

donde y fue el número de microlitros de oxígeno consumidos por hora y x el peso del animal (en gramos). Resuelva para y.

Solución: Primero se combinan los términos del lado derecho en un solo logaritmo:

$$\begin{aligned} \log y &= \log 5.934 + 0.885 \log x \\ &= \log 5.934 + \log x^{0.885} && \text{(Propiedad 3 de la sección 6.3)} \\ \log y &= \log(5.934x^{0.885}) && \text{(Propiedad 1 de la sección 6.3)} \end{aligned}$$

Como los logaritmos son uno a uno, se tiene

$$y = 5.934x^{0.885}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN EXPONENCIAL

Greg escogió un número y lo multiplicó por una potencia de 32. Jean inició con el mismo resultado, cuando ella lo multiplicó por 4 elevado a un número que era nueve unidades menor que tres veces el exponente que utilizó Greg. ¿Qué potencia de 32 utilizó Greg?

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación exponencial

Determine x si $(25)^{x+2} = 5^{3x-4}$.

Solución: Como $25 = 5^2$, ambos lados de la ecuación pueden expresarse como potencias de 5:

$$\begin{aligned} (25)^{x+2} &= 5^{3x-4} \\ (5^2)^{x+2} &= 5^{3x-4} \\ 5^{2x+4} &= 5^{3x-4} \end{aligned}$$

Como 5^x es una función uno a uno,

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 3x - 4 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

USO DE LOGARITMOS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN EXPONENCIAL

El gerente de ventas de una cadena de comida rápida determina que las ventas del desayuno empiezan a disminuir el final de una campaña promocional. La venta en dólares, como una función del número de días d después de que termina la campaña, está dada por $S = 800\left(\frac{4}{3}\right)^{-0.1d}$. Si el gerente no quiere que las ventas caigan por debajo de 450 por día antes de iniciar una nueva campaña, ¿cuándo debe iniciar dicha campaña?

Algunas ecuaciones exponenciales pueden resolverse al tomar el logaritmo de ambos lados, después de escribir la ecuación en la forma adecuada. El ejemplo siguiente lo ilustra.

EJEMPLO 3 Uso de logaritmos para resolver una ecuación exponencial

Resuelva $5 + (3)4^{x-1} = 12$.

Solución: Primero se aísla la expresión exponencial 4^{x-1} en un lado de la ecuación:

$$\begin{aligned} 5 + (3)4^{x-1} &= 12 \\ (3)4^{x-1} &= 7 \\ 4^{x-1} &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

[9] R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

Ahora se toma el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln 4^{x-1} = \ln \frac{7}{3}$$

Al simplificar se obtiene

$$(x-1)\ln 4 = \ln \frac{7}{3}$$

$$x - 1 = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4}$$

$$x = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4} + 1 \approx 1.61120$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

En el ejemplo 3, se utilizan logaritmos naturales para resolver la ecuación dada. Sin embargo, pueden emplearse logaritmos de cualquier base. Por lo general, se usan logaritmos naturales o logaritmos comunes si se desea una forma decimal de la solución. Si se utilizan logaritmos comunes se obtendría

$$x = \frac{\log \frac{7}{3}}{\log 4} + 1 \approx 1.61120$$

TECNOLOGÍA

En la figura 6.23 se muestra una solución gráfica de la ecuación $5 + (3)4^{x-1} = 12$ del ejemplo 3. Esta solución ocurre en la intersección de las gráficas de $y = 5 + (3)4^{x-1}$ y $y = 12$.

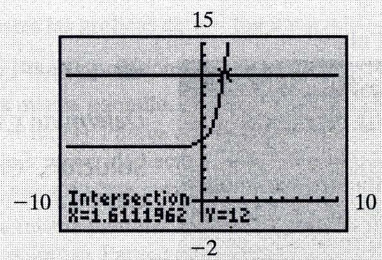


FIGURA 6.23 La solución de $5 + (3)4^{x-1} = 12$ es aproximadamente igual a 1.61120.

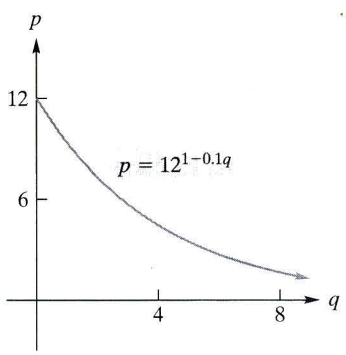


FIGURA 6.24 Gráfica de la ecuación de demanda $p = 12^{1-0.1q}$.

EJEMPLO 4 Ecuación de demanda

La ecuación de demanda para un producto es $p = 12^{1-0.1q}$. Utilice logaritmos comunes para expresar q en términos de p.

Solución: En la figura 6.24 se muestra la gráfica de esta ecuación de demanda para $q \geq 0$. Como es común para una ecuación de demanda, la gráfica desciende de izquierda a derecha. Es necesario resolver la ecuación para q. Al tomar logaritmos comunes de ambos lados *de* $p = 12^{1-0.1q}$, se obtiene

$$\log p = \log(12^{1-0.1q})$$

$$\log p = (1 - 0.1q)\log 12$$

$$\frac{\log p}{\log 12} = 1 - 0.1q$$

$$0.1q = 1 - \frac{\log p}{\log 12}$$

$$q = 10\left(1 - \frac{\log p}{\log 12}\right)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 43

Para resolver algunas ecuaciones exponenciales que incluyen la base e o la base 10, como $10^{2x} = 3$, el proceso de tomar logaritmos de ambos lados puede combinarse con la identidad $\log_b b^r = r$ [Ecuación fundamental (1) de la sección 6.2] para transformar la ecuación en una forma logarítmica. En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} 10^{2x} &= 3 \\ 2x &= \log 3 && \text{(forma logarítmica)} \\ x &= \frac{\log 3}{2} \approx 0.2386 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Relación depredador-presa

En un artículo que concierne a presas y depredadores, Holling[10] *hace referencia a una ecuación de la forma*

$$y = K(1 - e^{-ax})$$

donde x es la densidad de presas, y es el número de presas atacadas, y tanto K como a son constantes. Verifique su afirmación de que

$$\ln \frac{K}{K - y} = ax$$

Solución: Para encontrar ax, se resuelve la ecuación dada para e^{-ax}:

$$\begin{aligned} y &= K(1 - e^{-ax}) \\ \frac{y}{K} &= 1 - e^{-ax} \\ e^{-ax} &= 1 - \frac{y}{K} \\ e^{-ax} &= \frac{K - y}{K} \end{aligned}$$

Ahora se convierte a la forma logarítmica:

$$\begin{aligned} \ln \frac{K - y}{K} &= -ax \\ -\ln \frac{K - y}{K} &= ax \\ \ln \frac{K}{K - y} &= ax && \text{(propiedad 4 de la sección 6.3)} \end{aligned}$$

como quería mostrarse.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LOGARÍTMICA

La medición de un terremoto en la escala de Richter está dada por $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde I es la intensidad del terremoto, e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. Un terremoto que es 675 000 veces tan intenso como un terremoto de nivel cero, tiene una magnitud en la escala de Richter que es 4 veces mayor que otro terremoto. ¿Cuál es la intensidad de este otro terremoto?

Pueden resolverse algunas ecuaciones logarítmicas al reescribirlas en forma exponencial.

EJEMPLO 6 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelva $\log_2 x = 5 - \log_2(x + 4)$.

Solución: Aquí, primero debe suponerse que x y $x + 4$ son positivos, de modo que sus logaritmos estén definidos. Ambas condiciones se satisfacen si $x > 0$. Para resolver la ecuación, primero se colocan todos los logaritmos en un lado de modo que puedan combinarse:

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2(x + 4) &= 5 \\ \log_2[x(x + 4)] &= 5 \end{aligned}$$

[10] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism". *The Canadian Entomologist*, 91, núm. 7 (1959), 385-398.

En forma exponencial, se tiene

$$
\begin{aligned}
x(x+4) &= 2^5 \\
x^2 + 4x &= 32 \\
x^2 + 4x - 32 &= 0 \qquad \text{(ecuación cuadrática)} \\
(x-4)(x+8) &= 0 \\
x = 4 \quad &\text{o} \quad x = -8
\end{aligned}
$$

Como debe tenerse que $x > 0$, la única solución es 4, lo cual puede verificarse al sustituir en la ecuación original. De hecho, al reemplazar x por 4 en $\log_2 x$ se obtiene $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ mientras que al reemplazar x por 4 en $5 - \log_2(x+4)$ se obtiene $5 - \log_2(4+4) = 5 - \log_2(8) = 5 - \log_2 2^3 = 5 - 3 = 2$. Como los resultados son iguales, 4 es una solución de la ecuación.

Es recomendable verificar las soluciones extrañas al resolver una ecuación logarítmica.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Problemas 6.4

Encuentre x en los problemas 1 a 36. Redondee sus respuestas a tres decimales.

*1. $\log(3x+2) = \log(2x+5)$ **2.** $\log x - \log 5 = \log 7$

3. $\log 7 - \log(x-1) = \log 4$ **4.** $\log_2 x + 3\log_2 2 = \log_2 \frac{2}{x}$

*5. $\ln(-x) = \ln(x^2 - 6)$ **6.** $\ln(4-x) + \ln 2 = 2\ln x$

*7. $e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{14}$ **8.** $(e^{3x-2})^3 = e^3$ **9.** $(81)^{4x} = 9$

10. $(27)^{2x+1} = \dfrac{1}{3}$ **11.** $e^{2x} = 9$ **12.** $e^{4x} = \frac{3}{4}$

*13. $2e^{5x+2} = 17$ **14.** $5e^{2x-1} - 2 = 23$ **15.** $10^{4/x} = 6$

16. $\dfrac{4(10)^{0.2x}}{5} = 3$ **17.** $\dfrac{5}{10^{2x}} = 7$

18. $2(10)^x + (10)^{x+1} = 4$ **19.** $2^x = 5$

20. $7^{2x+3} = 9$ **21.** $7^{3x-2} = 5$

22. $4^{x/2} = 20$ **23.** $2^{-2x/3} = \dfrac{4}{5}$

24. $5(3^x - 6) = 10$ **25.** $(4)5^{3-x} - 7 = 2$

26. $\dfrac{7}{3^x} = 13$ **27.** $\log(x-3) = 3$

28. $\log_2(x+1) = 4$ **29.** $\log_4(9x-4) = 2$

30. $\log_4(2x+4) - 3 = \log_4 3$ **31.** $\log(3x-1) - \log(x-3) = 2$

32. $\log(x-3) + \log(x-5) = 1$

33. $\log_2(5x+1) = 4 - \log_2(3x-2)$

34. $\log(x+2)^2 = 2$, donde $x > 0$

35. $\log_2\left(\dfrac{2}{x}\right) = 3 + \log_2 x$ **36.** $\ln(x-2) = \ln(2x-1) + 3$

37. Plantas arraigadas En un estudio sobre plantas arraigadas en cierta región geográfica,[11] se determinó que en terrenos de tamaño A (en metros cuadrados), el número promedio de especies encontradas era S. Cuando se graficó $\log S$ como una función de $\log A$, el resultado fue una línea recta dada por

$$\log S = \log 12.4 + 0.26 \log A$$

Resuelva para S.

38. Producto nacional bruto En un artículo, Taagepera y Hayes se refieren a una ecuación de la forma

$$\log T = 1.7 + 0.2068 \log P - 0.1334 (\log P)^2$$

Aquí T es el porcentaje del producto nacional bruto (PNB) de un país correspondiente al comercio exterior (exportaciones más importaciones), y P es la población del país (en unidades de 100 000).[12] Verifique la afirmación de que

$$T = 50P^{(0.2068 - 0.1334 \log P)}$$

Puede suponer que $\log 50 = 1.7$. También verifique que, para cualquier base b, $(\log_b x)^2 = \log_b(x^{\log_b x})$.

39. Radiactividad El número de miligramos presentes de una sustancia radiactiva después de t años está dado por

$$Q = 100e^{-0.035t}$$

(a) ¿Cuántos miligramos estarán presentes después de 0 años?

(b) ¿Después de cuántos años habrá 20 miligramos? Dé su respuesta al año más cercano.

40. Muestra de sangre En la superficie de un portaobjetos se halla una retícula que divide la superficie en 225 cuadrados iguales. Suponga que se esparce una muestra de sangre que contiene N células rojas en el portaobjetos, y que las células se distribuyen aleatoriamente. El número de cuadrados que no tienen células está dado (de manera aproximada) por $225e^{-N/225}$. Si 100 de los cuadrados no tienen células, estime el número de células que contenía la muestra.

41. Población En una ciudad la población, P, crece a razón de 2% por año. La ecuación $P = 1\,000\,000(1.02)^t$ da la población t años después de 1998. Encuentre el valor de t para el que la población es 1 500 000. Dé su respuesta a la décima más cercana.

[11] R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

[12] R. Taagepera y J. P. Hayes, "How Trade/GNP Ratio Decreases with Country Size", *Social Science Research*, 6 (1977), 108-132.

42. Penetración de mercado En un análisis de penetración de mercado de nuevos productos, Hurter y Rubenstein[13] hacen referencia a la función

$$F(t) = \frac{q - pe^{-(t+C)(p+q)}}{q[1 + e^{(t+C)(p+q)}]}$$

donde p, q y C son constantes. Aseguran que si $F(0) = 0$, entonces

$$C = -\frac{1}{p+q} \ln \frac{q}{p}$$

Demuestre que su afirmación es cierta.

*__43. Ecuación de demanda__ La ecuación de demanda para un producto es $q = 80 - 2^p$. Resuelva para p y exprese su respuesta en términos de logaritmos comunes, como en el ejemplo 4. Evalúe p con dos decimales cuando $q = 60$.

44. Inversión La ecuación $A = P(1.105)^t$ da el valor A, al final de t años de una inversión de P dólares compuesta anualmente a una tasa de interés de 10.5%. ¿En cuántos años se duplicará una inversión? Dé su respuesta al año más cercano.

45. Ventas Después de t años el número de unidades de un producto vendidas en un año está dado por $q = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{0.8^t}$. Tal ecuación se llama *ecuación de Gompertz*, y describe el crecimiento natural en muchas áreas de estudio. Resuelva esta ecuación para t de la misma manera que en el ejemplo 4 y muestre que

$$t = \frac{\log\left(\dfrac{3 - \log q}{\log 2}\right)}{\log 0.8}$$

También, para cualquier A y para las b y a apropiadas, resuelva $y = Ab^{a^x}$ para x y explique por qué la solución previa es un caso especial.

46. Ecuación de aprendizaje Suponga que la producción diaria de unidades de un nuevo producto en el t-ésimo día de una corrida de producción está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t})$$

Tal ecuación se llama *ecuación de aprendizaje*, e indica que conforme pasa el tiempo, la producción por día aumentará. Lo anterior puede atribuirse a mejorías en el desempeño de los trabajadores. Determine, a la unidad completa más cercana, la producción en (a) el primer día, y (b) en el décimo día después del inicio de una producción. (c) ¿Después de cuántos días se alcanzará una producción diaria de 400 unidades? Dé sus respuestas redondeadas al día más cercano.

47. Verifique que 4 es la única solución de la ecuación logarítmica del ejemplo 6 al graficar la función

$$y = 5 - \log_2(x + 4) - \log_2 x$$

y observe el momento en que $y = 0$.

48. Resuelva $2^{3x+0.5} = 17$. Redondee su respuesta a dos decimales.

49. Resuelva $\ln(x + 2) = 5 - x$. Redondee su respuesta a dos decimales.

50. Grafique la ecuación $3(2)^y - 4x = 5$. (*Una pista:* Despeje y como una función explícita de x.)

6.5 Repaso

Términos y símbolos importantes

		Ejemplos
Sección 6.1	**Funciones exponenciales**	
	función exponencial, b^x, para $b > 1$ y para $0 < b < 1$	Ej. 2, 3, p. 236, 237
	interés compuesto capital monto compuesto	Ej. 6, p. 239
	periodo de interés tasa periódica tasa nominal e función exponencial natural, e^x	Ej. 8, p. 242
	ley de decaimiento exponencial cantidad inicial constante de decaimiento vida media	Ej. 11, p. 244
Sección 6.2	**Funciones logarítmicas**	
	función logarítmica, $\log_b x$ logaritmo común, $\log x$	Ej. 5, p. 250
	logaritmo natural, $\ln x$	Ej. 5, p. 250
Sección 6.3	**Propiedades de los logaritmos**	
	fórmula de cambio de base	Ej. 8, p. 257
Sección 6.4	**Ecuaciones logarítmicas y exponenciales**	
	ecuación logarítmica ecuación exponencial	Ej. 1, p. 259

Resumen

Una función exponencial tiene la forma $f(x) = b^x$. La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene una de dos formas generales, dependiendo del valor de la base b (vea la figura. 6.3). La función exponencial está involucrada en la fórmula de interés compuesto:

$$S = P(1 + r)^n$$

donde S es el monto compuesto de un capital P al final de n periodos de interés a la tasa periódica r.

Una base utilizada con frecuencia en una función exponencial es el número irracional e, donde $e \approx 2.71828$. Aparece en análisis económico y en muchas situaciones que implican crecimiento o declinación, como estudios poblacionales y decaimiento radiactivo. Los elementos radiactivos siguen la ley de decaimiento exponencial,

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

[13] A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, *et al.*, "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

donde N es la cantidad presente en el tiempo t, N_0 la cantidad inicial y λ la constante de decaimiento. El tiempo necesario para que la mitad de la cantidad del elemento decaiga se conoce como vida media.

La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, y viceversa. La función logarítmica de base b se denota por $\log_b$, en tanto que $y = \log_b x$ si y sólo si $b^y = x$. La gráfica de $y = \log_b x$ tiene una de dos formas generales dependiendo del valor de la base b (vea la figura 6.19). Los logaritmos de base e se llaman logaritmos naturales y se denotan por ln, los de base 10 se llaman logaritmos comunes y se denotan por log. La vida media T de un elemento radiactivo puede expresarse en términos de un logaritmo natural y de la constante de decaimiento: $T = (\ln 2)/\lambda$.

Algunas propiedades, importantes de los logaritmos son las siguientes:

$$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$$
$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$
$$\log_b m^r = r \log_b m$$
$$\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m$$
$$\log_b 1 = 0$$
$$\log_b b = 1$$
$$\log_b b^r = r$$
$$b^{\log_b m} = m$$
$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

Además, si $\log_b m = \log_b n$, entonces $m = n$. De manera similar, si $b^m = b^n$, entonces $m = n$. Muchas de estas propiedades se utilizan en la solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 6, escriba cada una de las formas exponenciales de manera logarítmica y cada forma logarítmica de manera exponencial.

1. $3^5 = 243$
2. $\log_5 625 = 4$
3. $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$
4. $10^5 = 100\,000$
5. $e^4 = 54.598$
6. $\log_9 9 = 1$

En los problemas 7 a 12, determine el valor de la expresión sin utilizar una calculadora.

7. $\log_5 125$
8. $\log_4 16$
9. $\log_3 \frac{1}{81}$
10. $\log_{1/4} \frac{1}{64}$
11. $\log_{1/3} 9$
12. $\log_4 2$

En los problemas 13 a 18, encuentre x sin utilizar una calculadora.

13. $\log_5 625 = x$
14. $\log_x \frac{1}{81} = -4$
15. $\log_2 x = -5$
16. $\ln \frac{1}{e} = x$
17. $\ln(2x + 3) = 0$
18. $e^{\ln(x+4)} = 7$

En los problemas 19 y 20 se ha establecido log 2 = a y log 3 = b. Exprese el logaritmo dado en términos de a y de b.

19. $\log 8000$
20. $\log \frac{9}{\sqrt{2}}$

En los problemas 21 a 26, escriba cada expresión como un solo logaritmo.

21. $3\log 7 - 2\log 5$
22. $5\ln x + 2\ln y + \ln z$
23. $2\ln x + \ln y - 3\ln z$
24. $\log_6 2 - \log_6 4 - 9\log_6 3$
25. $\frac{1}{2}\log_2 x + 2\log_2(x^2) - 3\log_2(x+1) - 4\log_2(x+2)$
26. $4\log x + 2\log y - 3(\log z + \log w)$

En los problemas 27 a 32, escriba la expresión en términos de $\ln x$, $\ln y$ *y* $\ln z$.

27. $\ln \frac{x^3 y^2}{z^{-5}}$
28. $\ln \frac{\sqrt{x}}{(yz)^2}$
29. $\ln \sqrt[3]{xyz}$
30. $\ln \left[\frac{xy^3}{z^2}\right]^4$
31. $\ln \left[\frac{1}{x}\sqrt{\frac{y}{z}}\right]$
32. $\ln \left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(\frac{x}{z}\right)^3\right]$
33. Escriba $\log_3(x + 5)$ en términos de logaritmos naturales.
34. Escriba $\log_2(7x^3 + 5)$ en términos de logaritmos comunes.
35. Suponga que $\log_2 19 = 4.2479$ y $\log_2 5 = 2.3219$. Encuentre $\log_5 19$.
36. Utilice logaritmos naturales para determinar el valor de $\log_4 5$.
37. Si $\ln 3 = x$ y $\ln 4 = y$, exprese $\ln(16\sqrt{3})$ en términos de x y de y.
38. Exprese $\log \frac{x^2\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[5]{x^2+2}}$ en términos de $\log x$, $\log(x + 1)$, y $\log(x^2 + 2)$.
39. Simplifique $10^{\log x} + \log 10^x + \log 10$.
40. Simplifique $\log 10^2 + \log 1000 - 5$.
41. Si $\ln y = x^2 + 2$, encuentre y.
42. Bosqueje las gráficas de $y = 3^x$ así como $y = \log_3 x$.
43. Bosqueje la gráfica de $y = 2^{x+3}$.
44. Bosqueje la gráfica de $y = -2\log_2 x$.

Encuentre x en los problemas 45 a 52.

45. $\log(5x + 1) = \log(4x + 6)$
46. $\log 3x + \log 3 = 2$
47. $3^{4x} = 9^{x+1}$
48. $4^{3-x} = \frac{1}{16}$
49. $\log x + \log(10x) = 3$
50. $\log_2(x+4) = \log_2(x-2) + 3$
51. $\ln(\log_x 3) = 2$
52. $\log_2 x + \log_4 x = 3$

Encuentre x en los problemas 53 a 58. Redondee sus respuestas a tres decimales.

53. $e^{3x} = 14$
54. $10^{3x/2} = 5$
55. $3(10^{x+4} - 3) = 9$
56. $7e^{3x-1} - 2 = 1$
57. $4^{x+3} = 7$
58. $3^{5/x} = 2$
59. **Inversiones** Si se invierten \$2600 durante $6\frac{1}{2}$ años a 6% compuesto trimestralmente, determine (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto.
60. **Inversiones** Encuentre el monto compuesto de una inversión de \$4000 durante cinco años a una tasa de 11% compuesto mensualmente.
61. Encuentre la tasa nominal que corresponde a una tasa periódica de $1\frac{1}{6}$% mensual.
62. **Crecimiento de bacterias** El número de bacterias de un cultivo aumenta a razón de 5% por hora. Al inicio, estaban

presentes 600 bacterias. (a) Determine una ecuación que dé el número, N, de bacterias después de t horas. (b) ¿Cuántas estarán presentes después de una hora? (c) ¿Y después de cinco horas? Dé la respuesta del inciso (c) al entero más cercano.

63. **Crecimiento poblacional** La población de un pequeño pueblo *crece* a razón de -0.5% anual porque la emigración en busca de trabajo a las ciudades cercanas excede la tasa de natalidad. En 2006 la población era de 6000. (a) Determine una ecuación que dé la población, P, después de t años a partir de 2006, (b) Encuentre la población en el año 2016 (no olvide expresar su respuesta como un número entero).

64. **Ingreso** Debido a una campaña de publicidad ineficaz, la compañía de rasuradoras Kleer-Kut encuentra que sus ingresos anuales han sufrido una reducción drástica. Además, el ingreso anual R al final de los t años de negocios satisface la ecuación $R = 200\,000e^{-0.2t}$. Encuentre el ingreso anual al final de dos años y al final de tres.

65. **Radiactividad** Una sustancia radiactiva decae de acuerdo con la fórmula

$$N = 10e^{-0.41t}$$

donde N es el número de miligramos presentes después de t horas. (a) Determine la cantidad inicial. (b) Al décimo de miligramos más cercano, determine la cantidad presente después de 2 horas, y (c) después de 10 horas. (d) A la décima de hora más cercana, determine la vida media de la sustancia, y (e) el número de horas para que quede un miligramo.

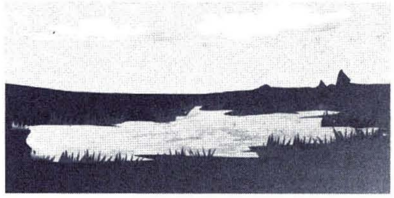
66. **Radiactividad** Si una sustancia radiactiva tiene una vida media de 10 días, ¿en cuántos días habrá $\frac{1}{8}$ de la cantidad inicial?

67. **Mercadotecnia** Una compañía de investigación de mercado necesita determinar cuántas personas se adaptan al sabor de unas nuevas pastillas para la tos. En un experimento, a un individuo se le dio una pastilla para la tos y se le pidió que periódicamente asignara un número, en la escala de 0 a 10, al sabor percibido. Este número fue llamado *magnitud de la respuesta.* Al sabor inicial le correspondió el número 10. Después de repetir el experimento varias veces, la compañía estimó que la magnitud de la respuesta, R, está dada por

$$R = 10e^{-t/40}$$

donde t es el número de segundos después de que el sujeto tomó la pastilla para la tos. (a) Encuentre la magnitud de la respuesta al cabo de 20 segundos. Redondee su respuesta al entero más cercano. (b) ¿Después de cuántos segundos la persona tiene una magnitud de respuesta de 5? Aproxime su respuesta al segundo más cercano.

68. **Sedimento en el agua** El agua de un lago contiene un sedimento cuya presencia reduce el paso de la luz a través del líquido. Los experimentos indican que la intensidad de la luz se reduce 10% al pasar a través de 20 cm de agua. Suponga que el lago es uniforme con respecto a la cantidad de sedimento que contiene. Se sumerge en el lago un instrumento de medición que puede detectar luz hasta de una intensidad de 0.17% de la luz solar total. ¿A qué profundidad empezará a registrar la ausencia de luz? Aproxime su respuesta a los 10 cm más cercanos.



69. **Enfriamiento del cuerpo** En un análisis de la velocidad de enfriamiento de las partes aisladas del cuerpo cuando se expone a bajas temperaturas, aparece la siguiente ecuación[14]

$$T_t - T_e = (T_t - T_e)_o e^{-at}$$

donde T_t es la temperatura de la parte del cuerpo en el instante t, T_e es la temperatura del medio ambiente, el subíndice o se refiere a la diferencia de temperaturas iniciales, y a es una constante. Muestre que

$$a = \frac{1}{t}\ln\frac{(T_t - T_e)_o}{T_t - T_e}$$

70. **Depreciación** Una alternativa de la depreciación lineal es la depreciación por *saldo decreciente.* Este método supone que un artículo pierde su valor más rápidamente al inicio de su vida que en etapas posteriores. Se resta un porcentaje fijo del valor cada mes. Suponga que el costo inicial de un artículo es C, y su vida útil es de N meses. Entonces el valor, V (en dólares), del artículo al final de n meses está dado por

$$V = C\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

donde cada mes conlleva una depreciación de $\frac{100}{N}$ por ciento. (Esto se denomina *depreciación sencilla por saldo decreciente*: si la depreciación anual fuera $\frac{200}{N}$ por ciento, sería depreciación doble por saldo decreciente.) Se adquirió una computadora laptop nueva por \$1800, tiene una vida útil de 48 meses y sufre una depreciación por saldo decreciente. ¿Después de cuántos meses, al entero más cercano, su valor cae por debajo de \$700?

71. Si $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, determine el rango de f. Redondee los valores a dos decimales.

72. Determine los puntos de intersección de las gráficas de $y = \ln(x + 2)$ y $y = x^2 - 7$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

73. Resuelva $\ln x = 6 - 2x$. Redondee su respuesta a dos decimales.

74. Resuelva $6^{3-4x} = 15$. Redondee su respuesta a dos decimales.

75. Despliegue la gráfica de $y = \log_2(x^2 + 1)$, y observe que la simetría con respecto al eje y y el rango de esta función le permiten restringir su pantalla al primer cuadrante.

76. Despliegue la gráfica de la ecuación $(6)5^y + x = 2$. (*Una pista:* Despeje y como una función explícita de x.)

77. Grafique $y = 3^x$ y $y = \dfrac{3^x}{9}$ en la misma pantalla. Parece que la gráfica de $y = \dfrac{3^x}{9}$ es la gráfica de $y = 3x$ recorrida dos unidades a la derecha. Pruebe de manera algebraica que esto es realmente cierto.

[14]R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

Aplicación práctica

Dosis de medicamento[15]

La determinación del medicamento y la prescripción de su dosis son aspectos extremadamente importantes en la profesión médica. Se debe tener precaución con los posibles efectos secundarios o tóxicos de las medicinas.

El cuerpo humano utiliza muchas medicinas de tal manera que la cantidad presente sigue una *ley de decaimiento exponencial*, como la que se expuso en la sección 6.1. Es decir, si $N(t)$ es la cantidad de la sustancia activa presente en el cuerpo en el instante t, entonces

$$N = N_0e^{-kt} \tag{1}$$

donde k es una constante positiva y N_0 es la cantidad presente en el instante $t = 0$. Si H es la *vida media* del medicamento, lo que significa el tiempo H para el cual $N(H) = N_0/2$, entonces, de acuerdo con la sección 6.1,

$$H = (\ln 2)/k \tag{2}$$

Observe que H determina por completo la constante k, puesto que la ecuación (2) puede reescribirse como $k = (\ln 2)/H$.

Suponga que quiere analizar el caso en el que se administran dosis iguales a un paciente cada I unidades de tiempo hasta que se alcance un nivel terapéutico, y después la dosis se reduce lo suficiente para mantener dicho nivel. La razón para mantener dosis *reducidas* con frecuencia se relaciona con los efectos tóxicos de las sustancias activas.

En particular, suponga que

(i) Hay d dosis de P unidades cada una;
(ii) se suministra una dosis en los tiempos $t = 0, I, 2I, \ldots,$ y $(d - 1)I$; y que
(iii) el nivel terapéutico, T, se alcanza en $t = dI$ (el cual ocurre un intervalo de tiempo después de administrar la última dosis).

Ahora se determinará una fórmula que proporcione el nivel terapéutico, T. En el instante $t = 0$ el paciente recibe las primeras P unidades, de modo que la cantidad del medicamento en su cuerpo es P. En el instante $t = I$ la cantidad presente de la primera dosis es Pe^{-kI} [por la ecuación (1)]. Además, en $t = I$ se suministran las segundas P unidades. Así que la cantidad *total* de medicina presente es

$$P + Pe^{-kI}$$

En el instante $t = 2I$, la cantidad que queda de la primera dosis es Pe^{-2kI}; de la segunda dosis, que ha estado en el sistema sólo durante un intervalo de tiempo, la cantidad presente es

Pe^{-kI}. También, en $t = 2I$ se suministra la tercera dosis de P unidades, de modo que la cantidad total presente es

$$P + Pe^{-kI} + Pe^{-2kI}$$

Si se continúa de esta manera, la cantidad de medicamento presente en el sistema en el tiempo $(d - 1)I$, el momento de la última dosis, es

$$P + Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \cdots + Pe^{-(d-1)\cdot kI}$$

Así que para un intervalo de tiempo después, en el instante dI, cuando no se administra una dosis de P, pero es cuando se alcanza el nivel terapéutico, se tiene

$$T = Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \cdots + Pe^{-dkI} \tag{3}$$

como cada término de la expresión anterior decae en un factor de e^{-kI}. Ésta es una buena oportunidad de usar la *notación de sumatoria* que se expuso en la sección 1.5, y reescribir la ecuación (3) como

$$T = P\sum_{i=1}^{d} e^{-ikI} \tag{4}$$

[15]Este análisis está adaptado de Gerald M. Armstrong y Calvin P. Midgley, "The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages", *The Mathematics Teacher*, 80, núm. 3 (febrero de 1987), 110-113. Con permiso del National Council of Teachers of Mathematics.

La suma es de un tipo especial que se estudiará después, pero observe que al multiplicar ambos lados de la ecuación (4) por e^{-kI}, se obtiene

$$e^{-kI}T = P\sum_{i=2}^{d+1} e^{-ikI} \tag{5}$$

Si se restan los lados de la ecuación (5) de los correspondientes a la ecuación (4), resulta

$$(1-e^{-kI})T = P\left(\sum_{i=1}^{d} e^{-ikI} - \sum_{i=2}^{d+1} e^{-ikI}\right) = P(e^{-kI} - e^{-(d+1)kI})$$

y usted debe asegurarse de verificar que la mayoría de los términos de las dos sumas *se cancelan* tal como se indica. A continuación, se obtiene

$$(1 - e^{-kI})T = Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})$$

$$T = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}} \tag{6}$$

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI}(1 - e^{-kI})}$$

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI} - 1} \tag{7}$$

La ecuación (7) expresa el nivel terapéutico, T, en términos de la dosis, P; los intervalos de tiempo de longitud I; el número de dosis, d; y la vida media H, de la medicina [ya que $k = (\ln 2)/H$]. También es posible resolver la ecuación para P si se conocen T, H, I y d. (La resolución de la ecuación (7) para H o I en términos de las otras cantidades puede ser bastante complicada.)

Ahora el objetivo es mantener el nivel terapéutico en el paciente. Para hacerlo, se suministra una dosis reducida R en los instantes $t = dI$, $(d + 1)I$, $(d + 2)I$, y así sucesivamente. Puede determinarse una fórmula para R de la manera siguiente.

En el instante $t = (d + 1)I$, pero antes de suministrar la segunda dosis reducida, la cantidad de medicamento en el sistema proveniente de la primera dosis reducida es Re^{-kI}, y la cantidad que permanece del nivel terapéutico es Te^{-kI}. Suponga que se requiere que la suma de estas cantidades sea el nivel terapéutico, T; esto es,

$$T = Re^{-kI} + Te^{-kI}$$

Al resolver para R, se obtiene

$$Re^{-kI} = T - Te^{-kI}$$

$$R = T(1 - e^{-kI})e^{kI}$$

Al reemplazar T por el lado derecho de la ecuación (6), se obtiene

$$R = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}}(1 - e^{-kI})e^{kI}$$

que se simplifica como

$$R = P(1 - e^{-dkI}) \tag{8}$$

Si se continúa con las dosis reducidas a intervalos de tiempo de longitud I, se asegura que el nivel terapéutico nunca esté por debajo de T después de $(d + 1)I$. Además, observe que $-dkI < 0$, entonces $0 < e^{-dkI} < 1$. En consecuencia, el factor $1 - e^{-dkI}$ de la ecuación (8) está entre 0 y 1. Esto asegura que R sea menor que P; de aquí que R sea en realidad una dosis *reducida.*

Es interesante observar que Armstrong y Midgley establecen que "la cantidad terapéutica T debe seleccionarse de un rango de valores determinados de manera empírica. El buen juicio y la experiencia médica son necesarios para seleccionar los intervalos apropiados y su duración, cuando hay que administrar un medicamento. Incluso la vida media de éste puede variar un poco entre los pacientes". En `www.fda.gov/cder` puede encontrarse información adicional sobre sustancias médicas y su uso seguro.

Problemas

1. De la ecuación (7), despeje (a) P y (b) d.
2. Muestre que si I es igual a la vida media de la sustancia activa, la ecuación (7) puede escribirse como
$$T = \left(1 - \frac{1}{2^d}\right)P$$
Observe que $0 < 1 - (1/2^d) < 1$ para $d > 0$. Esta ecuación implica que cuando se administran dosis de P unidades a intervalos de tiempo iguales a la vida media del medicamento, en un intervalo de tiempo después de que cualquier dosis es administrada, pero antes de que se suministre la siguiente, el nivel total de medicamento en el sistema del paciente es menor que P.
3. La teofilina es una sustancia utilizada en el tratamiento del asma bronquial, tiene una vida media de 8 horas en el sistema de un paciente relativamente sano y no fumador. Suponga que el enfermo alcanza el nivel terapéutico deseado en 12 horas cuando se le suministran 100 miligramos cada 4 horas. Aquí $d = 3$. A causa de la toxicidad, la dosis debe reducirse más adelante. Al miligramo más cercano, determine (a) el nivel terapéutico y (b) la dosis reducida.
4. Utilice una calculadora graficadora para generar una gráfica de la concentración de la sustancia activa y verifique que la ecuación (8) proporciona de manera correcta la dosis de mantenimiento. Introduzca en la calculadora 0.5 → K, 3 → D, 1 → I y 1 → P. Después incorpore Y1 = P(1 − e^ (−D*K*I)) para representar R. Por último, teclee Y2 = Pe^(−K X)+P e^(−K(X − I))*(X ≥ I) + P e^(−K(X − 2I))*(X ≥ 2I) + Y1 e^(−K(X − 3I))*(X ≥ 3I) + Y1 e^(−K(X − 4I))*(X ≥ 4I). Después, seleccione sólo Y2 para que sea graficada y grafique la función. Experimente con diferentes valores para K, D, I y P. ¿Qué ajuste es necesario en la expresión para Y2 cuando cambia D?