

7

REGRESIÓN Y MODELACIÓN

OBJETIVO

Utilizar el software Excel y los procedimientos de linealización de puntos y regresión para construir modelos de pronóstico de ventas, ecuaciones de oferta y demanda y otros.

7.1 Introducción

El pronóstico de ventas es quizás una de las partes más importantes en el proceso de producción de cualquier empresa, ya que a través de él es posible establecer el inventario final de materia prima y elaborar el estado de resultados presupuestado. Y es que una proyección certera de las ventas se traducirá después en un ahorro en los inventarios de materia prima y producto terminado para la compañía. Cuando se tienen las ventas históricas de una compañía, en la mayoría de los casos, es posible asociarles una tendencia (lineal, polinomial, potencial, etc.) y construir un modelo matemático a partir de ellas.

Por modelo matemático se entiende una función o ecuación algebraica que devuelve una aproximación a las ventas, cuando estas últimas se trazan como puntos del plano cartesiano. La construcción de modelos a partir de la linealización y la regresión son dos temas que se abordan en el presente capítulo. La linealización como un procedimiento “general” y la regresión como un procedimiento estadístico que se incluye en la utilidad para gráficos en la mayor parte de programas para análisis de datos. Cabe mencionar que la construcción de modelos, en el presente capítulo, no se limitará al pronóstico de ventas, sino a la construcción de funciones de ingreso, ecuaciones de oferta y demanda y otros, algunos desarrollados por linealización y otros por regresión.

EJEMPLO 1

Suponga que las ventas de una compañía durante el primer semestre del año 2009, son como se muestra a continuación:

Mes	Unidades vendidas
1 enero	38
1 febrero	92
1 abril	250
15 abril	300
1 junio	493

Suponiendo que las ventas se comporten idénticas el próximo año (quizás aumentadas en un porcentaje), se busca construir un modelo que permita pronosticar las ventas al 1 de mayo del año 2010.

El análisis comienza trazando las ventas del semestre, para ello primero se introduce una escala, donde el 1 de enero será el mes 1, el 1 de febrero el mes 2, es decir el 1 de cada mes es la referencia.

Luego se introduce el número de mes y su venta correspondiente en Excel. A continuación se selecciona las celdas respectivas y de la cinta de opciones se escoge *Insertar*

y del grupo *Gráficos* se escoge *Dispersión* con líneas suavizadas y marcadores (vea la figura 7.1).

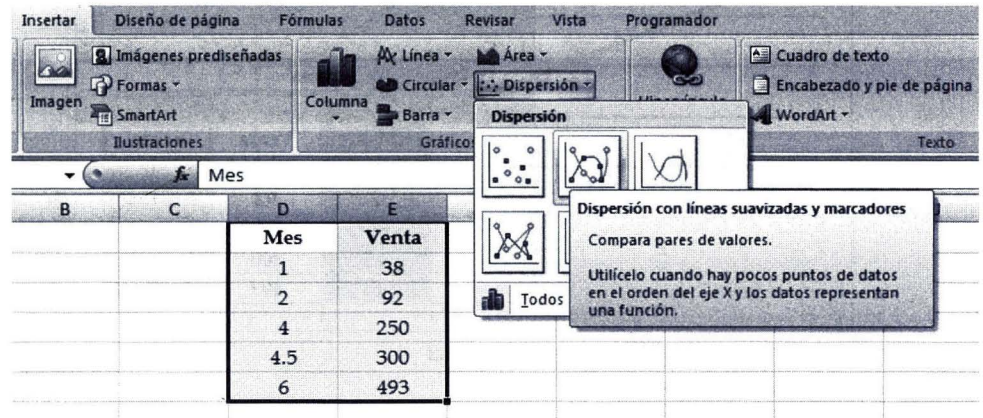


FIGURA 7.1

El resultado se muestra en la figura 7.2.

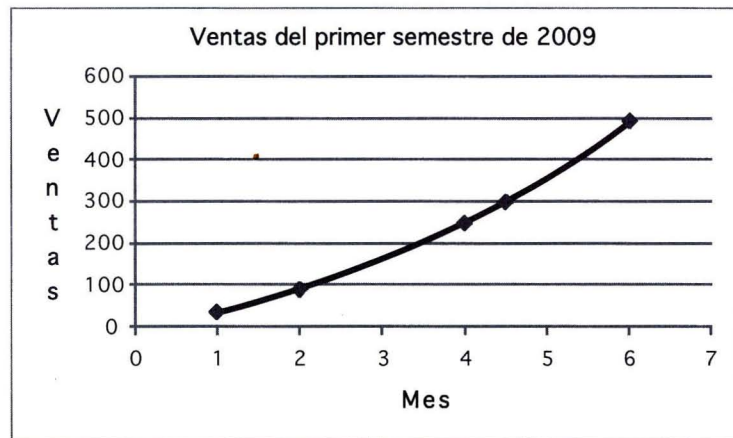


FIGURA 7.2

Cuando se dibujan los puntos, pareciera que una función cuadrática es la que mejor los representa.

Si x y y representan el mes y la venta, respectivamente, de un mes en particular de esta compañía, la única forma de eliminar la tendencia cuadrática es asociándole a cada mes (x) la raíz cuadrada de cada venta (\sqrt{y}).

A este proceso se le llama linealización de puntos. Es necesario linealizar los puntos puesto que el método de regresión lineal lo que hace es representar con una ecuación lineal a una serie de puntos, siempre y cuando éstos tengan una tendencia lineal.

Una vez que se haya calculado la raíz cuadrada de cada venta, se seleccionan las celdas correspondientes y nuevamente de la cinta de opciones, se elige *Insertar*, del grupo *Gráficos*, se escoge *Dispersión* (vea la figura 7.3).

El resultado se muestra en la figura 7.4.

Advierta que ahora los puntos parecen describir una línea recta. Y en efecto ese era el objetivo, ahora ya puede aplicarse el método de regresión lineal.

Para obtener la ecuación de regresión lineal bastará con irse a *Herramientas de gráficos* y en *Diseños de gráfico* escoger el *diseño 9* (vea la figura 7.5).

El resultado se observa en la figura 7.6.

The screenshot shows the Excel ribbon with the 'Dispersión' (Scatter) menu open. The data table below is as follows:

B	C	D	E
	Mes	Venta	Venta'
	1	38	6.164414
	2	92	9.591663
	4	250	15.811388
	4.5	300	17.320508
	6	493	22.203603

The 'Dispersión' menu includes options like 'Dispersión con líneas suavizadas y marcadores' (Scatter with smoothed lines and markers), which is highlighted. A tooltip for this option reads: 'Compara pares de valores. Utilícelo cuando hay pocos puntos de datos en el orden del eje X y los datos representan una función.'

FIGURA 7.3

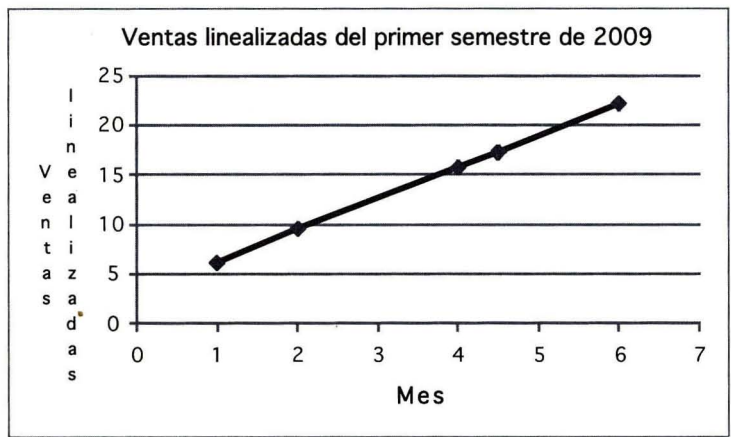


FIGURA 7.4

The screenshot shows the 'Herramientas de gráficos' (Chart Tools) ribbon in Microsoft Excel. The 'Diseño' (Design) tab is active, displaying a gallery of chart design styles. The chart in the background is a line graph with markers, similar to the one in Figure 7.4. The 'Diseño 9' style is highlighted.

FIGURA 7.5

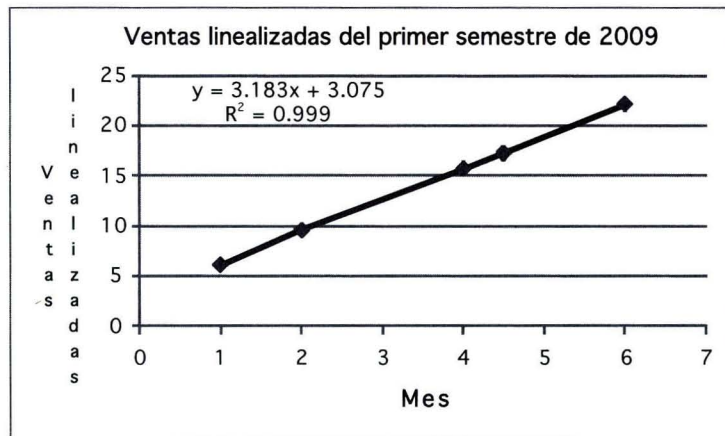


FIGURA 7.6

El diseño 9 permite ver la ecuación de regresión lineal en el gráfico. De allí que dicha ecuación sea la que mejor representa a los puntos.

Pero recuerde, en realidad $\sqrt{y} = 3.183x + 3.075$, así que la ecuación que realmente representa a los puntos originales se obtiene elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación de regresión. Esto es:

$$y = (3.183x + 3.075)^2$$

A continuación se muestra una tabla que compara las unidades vendidas con las unidades pronosticadas con el modelo.

Mes	Unidades	Pronóstico	Error
1	38	39.162564	1.162564
2	92	89.132481	2.867519
4	250	249.86125	0.138751
4.5	300	302.7078	2.7078022
6	493	491.64193	1.358071
Total	1 173		8.2347073

Advierta que se ha agregado una columna de error, esto es, para cada mes se ha calculado el error absoluto entre las ventas reales y las ventas pronosticadas. Al final puede observarse el error de todo el semestre.

Así, error relativo de todo el semestre es:

$$\frac{8.2347073}{1\ 173} * 100 = 0.70$$

Observe que el error relativo semestral es menor que 1%.

Por tanto, al 1 de mayo de 2009, las ventas son de:

$$y = (3.183(5) + 3.075)^2 \approx 361$$

Sin embargo, Excel también ofrece la posibilidad de representar mediante una ecuación a un conjunto de puntos, de manera directa, sin pasar por el proceso de linealización, como se observa en el siguiente ejemplo.



● EJEMPLO 2

Un estudiante fabrica y vende collares durante el verano. Él ha observado que cada vez que aumenta el precio de sus collares disminuye el número que vende de éstos, y en ocasiones sus ingresos. El detalle de la cantidad y los ingresos percibidos se resumen en la siguiente tabla:

Cantidad	Ingreso (Q)
26	76
24	98
18	126
12	118
4	60

Él desea saber cuál es la cantidad de collares que debe vender para que el ingreso sea máximo. El análisis comienza trazando los puntos en Excel. El procedimiento se ilustra en la figura 7.7.



FIGURA 7.7

El resultado se muestra en la figura 7.8.

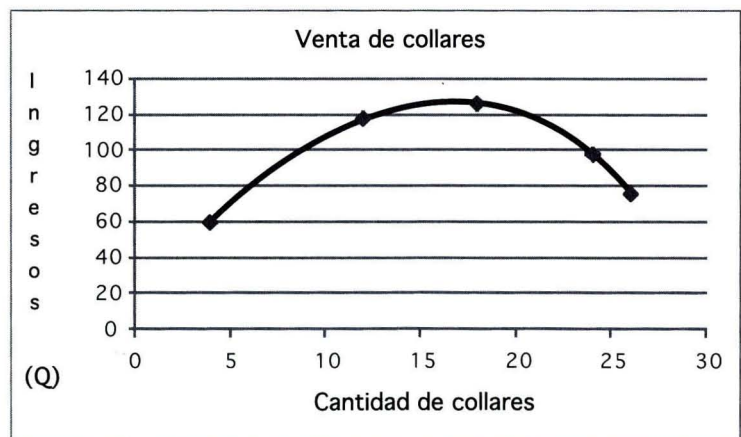


FIGURA 7.8

Ahora observe cómo hallar con Excel una ecuación que represente los puntos. Esto es, haciendo clic derecho sobre la gráfica se escoge la opción *Agregar línea de tendencia...* El procedimiento se ilustra en la figura 7.9.

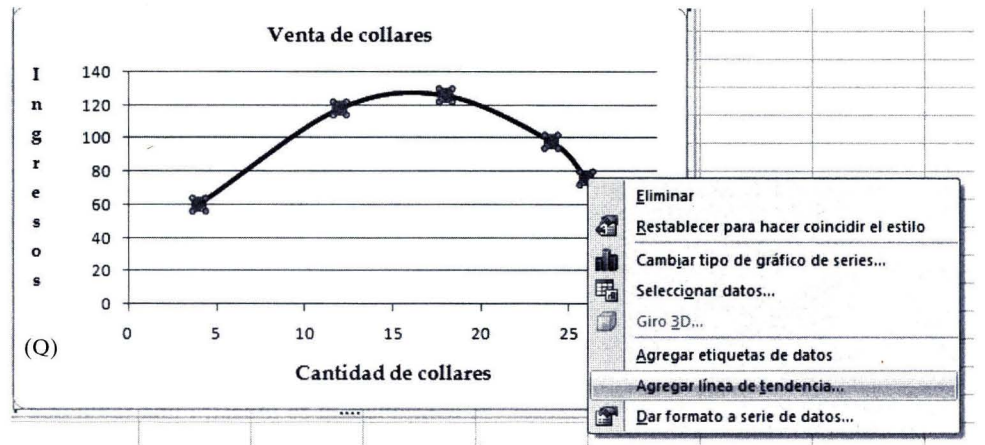


FIGURA 7.9

A continuación aparecen las opciones de línea de tendencia, donde se puede escoger un tipo de tendencia. Se escoge la *polinómica*, ordenación 2. Además se hace clic en las casillas *Presentar ecuación en el gráfico* y *Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico*.

Se escoge la opción polinómica, ordenación 2 porque se piensa que los datos se representan mejor con una ecuación cuadrática.

Opciones de línea de tendencia

Tipo de tendencia o regresión

- Exponencial
- Lineal
- Logarítmica
- Polinómica Ordenación: 2
- Potencial
- Media móvil Período: 2

Nombre de la línea de tendencia

- Automático: Polinómica (Ingreso (Q))
- Personalizado:

Extrapolar

Adelante: períodos

Hacia atrás: períodos

Señalar intersección =

Presentar ecuación en el gráfico

Presentar el valor R cuadrado en el gráfico

El resultado se muestra en la figura 7.10.

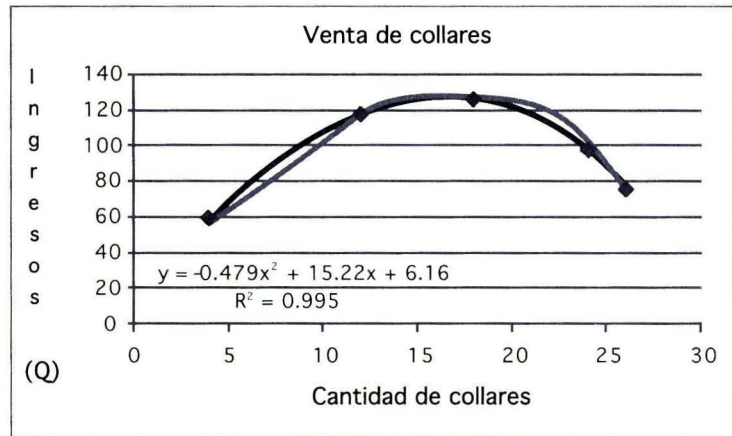


FIGURA 7.10

A continuación se muestra una tabla que compara los ingresos percibidos con los ingresos pronosticados con el modelo.

Precio Unitario (Q)	Ingreso (Q)	Pronóstico (Q)	Error (Q)
26	76	78.078	2.078
24	98	95.538	2.462
18	126	124.926	1.074
12	118	119.826	1.826
4	60	59.378	0.622
Total	478		8.062

Dado que la ecuación de ingresos es cuadrática, el valor máximo lo alcanza en el vértice, esto es:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{15.22}{2(-0.479)} \approx 16$$

Por tanto, él debe vender 16 collares al día para obtener el ingreso máximo de Q127.

Problemas 7.1

- La siguiente tabla muestra información de la ecuación de demanda de una compañía.

Cantidad	Precio unitario (Q)
15	40
25	35
55	25
60	22
65	20

Suponiendo que la relación entre la cantidad y el precio unitario es lineal, utilice Excel para hallar una ecuación para la demanda.

- RM I** Halle el precio para una cantidad de 50 artículos. Halle la cantidad para un precio de Q30. Halle el punto de equilibrio si la ecuación de oferta es $p = \frac{1}{4}q + 20$.
- RM II** Halle una ecuación para el ingreso en términos de la cantidad q . Halle la cantidad que representa el máximo ingreso para la compañía. Halle el máximo ingreso.
- RM III** Encuentre el superávit del consumidor.

- El dueño de un edificio de departamentos ha observado que cuando sube la renta de los departamentos disminuye el número alquilado de los mismos y en ocasiones sus ingresos. La siguiente tabla recoge información del número de departamentos alquilados y el ingreso por la renta de todos los alquilados.

Cantidad	Ingreso (Q)
8	1,760
12	2,240
20	2,000
24	1,760
30	560

Utilice Excel para hallar una ecuación para el ingreso en términos de la cantidad de departamentos alquilados.

RMI Halle el ingreso para una cantidad de 25 departamentos.
 Halle el número de departamentos que representan un ingreso de Q1000.

RMI Halle la cantidad que representa el máximo ingreso para el edificio.
 Halle el máximo ingreso.

3. Los costos totales en los que incurre un fabricante de sillas se resumen en la siguiente tabla.

Cantidad de sillas	Costo total (Q)
18	3,080
30	3,995
42	4,320
65	5,720
80	7,695

Utilice Excel para hallar una ecuación para el costo en términos de la cantidad de sillas, suponiendo una relación cuadrática.

RMI Halle el costo de producir 50 sillas.
 Halle la cantidad de sillas que representan un costo total de Q5000.
 Halle una ecuación para el costo medio.
 Halle el costo medio para 40 sillas.

RMI Halle una ecuación para el costo marginal.
 Halle el costo marginal para 45 sillas y diga qué representa.
 Halle el número de sillas que minimizan el costo medio.

RMIII Sea $C'(q)$ el costo marginal de producir q sillas.
 Halle:

$$\int_{10}^{20} C'(q) dq$$

Diga qué representa el resultado.

4. La siguiente tabla muestra información de la ecuación de demanda de una compañía.

Cantidad	Precio unitario (Q)
15	70
25	45
40	30
60	25
75	20

Utilice Excel para hallar una ecuación, suponiendo que la relación entre la cantidad y el precio unitario es potencial.

RMI Halle el precio para una cantidad de 16 artículos.
 Halle la cantidad para un precio de Q60.
 Halle el punto de equilibrio si la ecuación de oferta es $p = \frac{25}{2}q^{1/4}$.

RMI Halle la elasticidad del precio de la demanda para una cantidad de 16 artículos.

RMIII Encuentre el superávit del consumidor.
 Encuentre el superávit del productor.

5. La siguiente tabla muestra información de las ventas de una compañía durante el primer semestre de 2008.

Mes	Venta (unidades)
1 de enero	70
15 de febrero	120
1 de abril	160
15 de mayo	190
1 de junio	200

Tomando el 1 de enero como el mes 1, use Excel para hallar una ecuación para las ventas en términos del mes, suponiendo que la relación es logarítmica.

RMI Halle el mes para el cual las ventas son de 144 unidades.
 Halle las ventas al 1 de mayo de 2008.

Resumen

Dos herramientas importantes en la construcción de modelos algebraicos son la linealización y la regresión. La linealización de puntos, aunque es un modelo más "general" no se utiliza si los datos se ajustan a funciones comunes o elementales que se incluyen en utilería para gráficos de programas de computadora. Sólo en el caso que no se obtenga el ajuste deseado se utiliza la linealización. Como parte de las herramientas para la construcción de modelos, la regresión es el procedimiento

estadístico a través del cual se obtiene una función o ecuación algebraica que cumple con la característica que la suma de las distancias de la curva de regresión a cada punto de muestra que se utiliza para la elaboración de dicha curva, es mínima. Cabe mencionar que la curva de regresión puede ser lineal, polinomial, potencial, exponencial o logarítmica. La mayoría de los programas de computadora con utilería para gráficos, además de proporcionar la ecuación de regresión muestran el

coeficiente de correlación. El coeficiente de correlación, denotado con R^2 , indica qué tanto se ajusta la curva a los datos. Cuando el coeficiente es uno (1), se tiene un ajuste perfecto. A medida que difiere de uno, la suma de las distancias es mayor, y por ende el ajuste es menor. Cuando se tienen datos de la ecuación de demanda de una compañía, es posible construir una ecuación de regresión para ellos. Una vez que se tiene la

ecuación de demanda se construye la ecuación de ingreso y es posible utilizar los conocimientos adquiridos en *Razonamiento matemático II* para hallar la cantidad que representa el máximo ingreso, o bien si se conoce el precio de equilibrio, utilizar los conocimientos adquiridos en *Razonamiento matemático III* para hallar el superávit del consumidor.

Aplicación práctica

Aplicación práctica

Una compañía fabrica y vende un solo producto. Para la elaboración de dicho producto utiliza los materiales A, B, C y D. Los porcentajes que se emplean en la elaboración de un solo artículo se resumen en la siguiente tabla.

Material	Libra
A	1/2
B	3/4
C	2/5
D	1/3

Los materiales A, B, C y D cuestan Q8, Q20, Q10 y Q12, respectivamente. Para la elaboración de un artículo es necesario que la materia prima pase primero por los departamentos 1 y 2.

En el departamento 1 laboran 3 operarios tipo I y 2 operarios tipo II, mientras que en el departamento II laboran 2 operarios tipo II. El sueldo mensual incluidas prestaciones laborales de los operarios se resume en la siguiente tabla.

Operario	Sueldo por mes
I	Q1500
II	Q1800

La compañía tiene gastos fijos mensuales de Q1500 y sueldos administrativos mensuales incluidas prestaciones laborales de Q150 000.

Las ventas de la compañía durante los primeros 4 meses del año se muestran a continuación:

Mes	Unidades
Enero	76
Febrero	124
Marzo	152
Abril	170

A partir de esta información, obtenga:

- (a) Un pronóstico para las ventas del mes de mayo.
- (b) El costo de producción del mes de mayo.
- (c) El precio de un artículo para que el porcentaje de ganancia sobre el costo antes de impuestos en el mes de mayo sea del 60%.