

8

LÍMITES Y CONTINUIDAD

- 8.1 Límites
- 8.2 Límites (continuación)
- 8.3 Continuidad
- 8.4 Continuidad aplicada a desigualdades
- 8.5 Repaso

Aplicación práctica

Deuda nacional .

El filósofo Zenón de Elea era aficionado a las paradojas acerca del movimiento; la más famosa de ellas decía algo así: El guerrero Aquiles acepta competir en una carrera en contra de una tortuga. Aquiles puede correr 10 metros por segundo y la tortuga sólo 1 metro por segundo, por eso a la tortuga se le da una ventaja de 10 metros desde la línea de salida. Como Aquiles es mucho más rápido, aún así debería ganar. Pero para el momento en que él haya cubierto los primeros 10 metros y haya llegado al lugar en donde la tortuga inició, la tortuga ya habrá avanzado 1 metro y aún lleva la delantera. Y después de que Aquiles haya cubierto ese metro, la tortuga habrá avanzado 0.1 metro y aún llevaría la delantera. Y cuando Aquiles haya cubierto ese 0.1 metro, la tortuga habrá avanzado 0.01 metro y aún llevaría la delantera. Y así sucesivamente. Por lo tanto, Aquiles estaría cada vez más cerca de la tortuga pero nunca la alcanzaría.

Por supuesto que la audiencia de Zenón sabía que algo estaba mal en el argumento. La posición de Aquiles en el tiempo t después de haber iniciado la carrera es $(10 \text{ m/s})t$. La posición de la tortuga en el mismo tiempo t es $(1 \text{ m/s})t + 10 \text{ m}$. Cuando estas posiciones son iguales, Aquiles y la tortuga están lado a lado. Al despejar t de la ecuación resultante

$$(10 \text{ m/s})t = (1 \text{ m/s})t + 10 \text{ m}$$

se encuentra el tiempo en el cual Aquiles empareja a la tortuga.

La solución es $t = 1\frac{1}{9}$ segundos, tiempo en el que Aquiles ha corrido $(1\frac{1}{9}\text{s})(10 \text{ m/s}) = 11\frac{1}{9}$ metros.

Lo que desconcertaba a Zenón y a quienes lo escuchaban era cómo podría ser que

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 11\frac{1}{9}$$

donde el lado izquierdo representa una *suma infinita* y el lado derecho es un resultado finito. La solución moderna a este problema consiste en el concepto de límite, que es el tema principal de este capítulo. El lado izquierdo de la ecuación es una serie geométrica infinita. Si se utiliza la notación de límite y la fórmula para la suma de una serie geométrica, se escribe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k 10^{1-n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10 \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$$

OBJETIVO

Estudiar los límites y sus propiedades básicas.

8.1 Límites

Quizá usted ha estado en un estacionamiento en el que puede “aproximarse” al automóvil de enfrente, pero no quiere golpearlo, ni siquiera rozarlo. Esta noción de estar cada vez más cerca de algo, pero sin tocarlo, es muy importante en matemáticas, y está implícita en el concepto de *límite*, en el cual se sustentan los fundamentos del cálculo. Básicamente, se hará que una variable “se aproxime” a un valor particular y se examinará el efecto que tiene sobre los valores de la función.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Aunque esta función no está definida en $x = 1$, podría ser interesante observar el comportamiento de los valores de la función cuando x se acerca mucho a 1. En la tabla 8.1 se dan algunos valores de x que son un poco menores y otros un poco mayores que 1, y sus correspondientes valores funcionales. Observe que a medida que x toma valores más y más próximos a 1, sin importar si x se aproxima *por la izquierda* ($x < 1$) o *por la derecha* ($x > 1$), los valores correspondientes de $f(x)$ se acercan cada vez más a un solo número, a saber, el 3. Esto también resulta claro en la gráfica de f en la figura 8.1. Observe que aunque la función no está definida en $x = 1$ (como lo indica el pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan cada vez más a 3, conforme x se acerca más y más a 1. Para expresar esto, se dice que el **límite** de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3 y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Se puede hacer $f(x)$ tan cercana a 3 como se desee, y mantenerla así de cerca, al escoger un valor de x lo suficientemente cercano a 1, pero diferente de 1. El límite existe en 1, aunque 1 no se encuentra en el dominio de f .

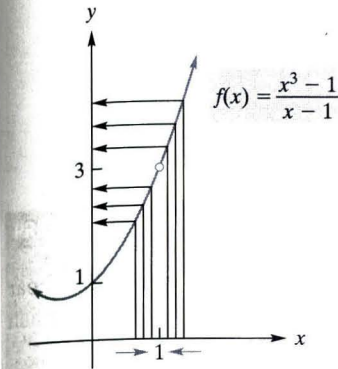


FIGURA 8.1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.

TABLA 8.1

$x < 1$		$x > 1$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.8	2.44	1.2	3.64
0.9	2.71	1.1	3.31
0.95	2.8525	1.05	3.1525
0.99	2.9701	1.01	3.0301
0.995	2.985025	1.005	3.015025
0.999	2.997001	1.001	3.003001

También puede considerarse el límite de una función cuando x se aproxima a un número que está en el dominio. A continuación se examinará el límite de $f(x) = x + 3$ cuando x se aproxima a 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

Obviamente, si x está cerca de 2 (pero no es igual a 2), entonces $x + 3$ es cercano a 5. Esto también resulta claro en la tabla y en la gráfica de la figura 8.2. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$$

Dada una función f y un número a , puede haber dos formas de asociar un número con el par (f, a) . Una manera consiste en la *evaluación de f en a* , a saber, $f(a)$. Ésta existe precisamente cuando a está en el dominio de f . Por ejemplo, si $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, como en

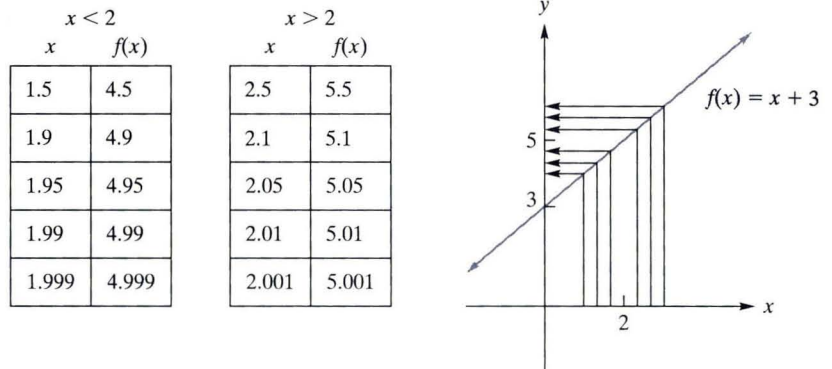


FIGURA 8.2 $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$.

el primer ejemplo, entonces $f(1)$ no existe. Otra forma de asociar un número con el par (f, a) es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a , el cual se denota por $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Se han dado dos ejemplos, a continuación se presenta el caso general.

DEFINICIÓN

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a , es el número L , que se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

siempre que $f(x)$ esté arbitrariamente cercana a L para toda x lo suficientemente cerca, pero diferente de a . Si no existe tal número, se dice que el límite no existe.

Debe enfatizarse que cuando es necesario encontrar un límite, no interesa lo que le pasa a $f(x)$ cuando x es igual a a , sino sólo en lo que le sucede a $f(x)$ cuando x es cercana a a . De hecho, aun cuando el valor $f(a)$ existiera, la definición anterior lo elimina de manera explícita. En el segundo ejemplo, $f(x) = x + 3$, se tiene $f(2) = 5$ y también $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$, pero es muy posible tener una función f y un número a para los cuales existen tanto $f(a)$ como $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y son números diferentes. Además, un límite debe ser independiente de la manera en que x se aproxima a a . Esto es, el límite debe ser el mismo si x se acerca a a por la izquierda o por la derecha (para $x < a$ o $x > a$, respectivamente).

● **EJEMPLO 1 Estimación de un límite a partir de una gráfica**

a. Estime $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, donde la gráfica de f está dada en la figura 8.3(a).

Solución: Si se observan en la gráfica los valores de x cercanos a 1, se advierte que $f(x)$ está cercana a 2. Además, cuando x se aproxima cada vez más a 1, entonces $f(x)$ parece estar cada vez más cercana a 2. Así, se estima que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ es } 2$$

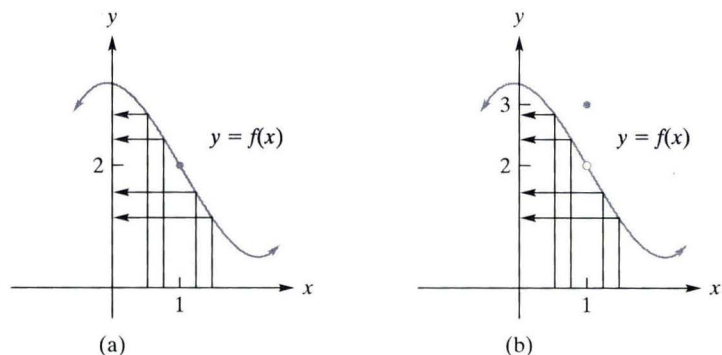


FIGURA 8.3 Investigación de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b. Estime $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, donde la gráfica de f está dada en la figura 8.3(b).

Solución: Aunque $f(1) = 3$, este hecho no tiene importancia sobre el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1. Se observa que cuando x se aproxima a 1, entonces $f(x)$ parece aproximarse a 2. Por lo tanto, se estima que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ es } 2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Hasta ahora todos los límites que se han considerado efectivamente existen. A continuación se verán algunas situaciones en las que no existe un límite.

EJEMPLO 2 Límites que no existen

a. Estime $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, si existe, donde la gráfica de f está dada en la figura 8.4.

Solución: Cuando x tiende a -2 por la izquierda ($x < -2$), los valores de $f(x)$ parecen más cercanos a 1. Pero cuando x tiende a -2 por la derecha ($x > -2$), entonces $f(x)$ parece más cercana a 3. Por lo tanto, cuando x tiende a -2 , los valores de la función no se acercan a un solo número. Se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ no existe}$$

Observe que el límite no existe aunque la función está definida en $x = -2$.

b. Estime $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

Solución: Sea $f(x) = 1/x^2$. La tabla de la figura 8.5 proporciona los valores de $f(x)$ para algunos valores de x cercanos a 0. Cuando x se acerca más y más a 0, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes sin cota alguna. Esto también es claro en la gráfica. Como los valores de $f(x)$ no se acercan a un número cuando x se acerca a 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

LÍMITES QUE NO EXISTEN

Los cajeros utilizan a diario la función "mayor entero" que se denota como $f(x) = \lfloor x \rfloor$ al dar cambio a los clientes. Esta función proporciona la cantidad de billetes para cada monto de cambio que se debe (por ejemplo, si a un cliente se le debe \$1.25 de cambio, recibiría \$1 en billete; por lo tanto $\lfloor 1.25 \rfloor = 1$). Formalmente, $\lfloor x \rfloor$ se define como el mayor entero que es menor o igual a x . Haga la gráfica de f , la cual algunas veces se denomina función escalonada, en su calculadora graficadora en el rectángulo de visualización estándar (esta función se encuentra en el menú de números y se denomina *integer part*). Explore esta gráfica con el uso del comando trace. Determine si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

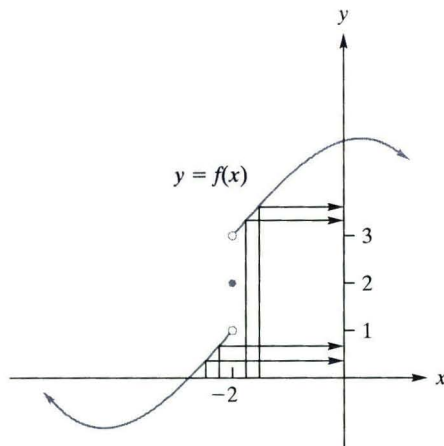


FIGURA 8.4 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ no existe.

x	$f(x)$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.1	100
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

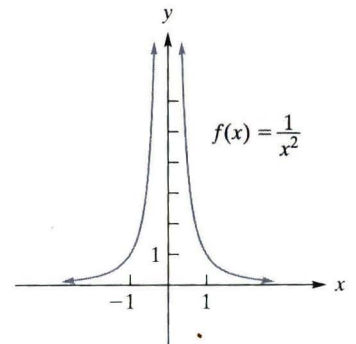


FIGURA 8.5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ no existe.

TECNOLOGÍA

Problema: Estime $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ si

$$f(x) = \frac{x^3 + 2.1x^2 - 10.2x + 4}{x^2 + 2.5x - 9}$$

Solución: Un método para encontrar el límite consiste en construir una tabla de valores de la función $f(x)$ cuando x es cercana a 2. De la figura 8.6, se estima que el límite es 1.57. De manera alternativa, puede estimarse el límite a partir de la gráfica de f . En la figura 8.7 se muestra la gráfica de f con la ventana estándar de $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Primero se hacen varios acercamientos alrededor de $x = 2$ y se obtiene lo que se muestra en la figura 8.8. Después de dar valores alrededor de $x = 2$, se estima que el límite es 1.57.

X	Y1
1.9	1.4688
1.99	1.5592
1.999	1.5682
1.9999	1.5691
2.01	1.5793
2.001	1.5702
2.0001	1.5693
X=2.0001	

FIGURA 8.6 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \approx 1.57$.

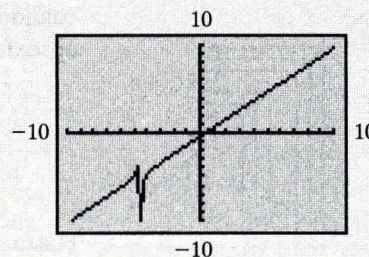


FIGURA 8.7 Gráfica de $f(x)$ en la ventana estándar.

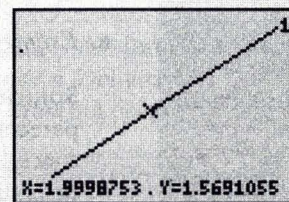


FIGURA 8.8 El acercamiento y trazado alrededor de $x = 2$ proporciona $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \approx 1.57$.

Propiedades de los límites

Para determinar límites, no siempre hace falta calcular los valores de la función o hacer el bosquejo de una gráfica. Existen también varias propiedades que se pueden emplear. Las siguientes pueden parecerle razonables:

1. Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

2. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$, para cualquier entero positivo n .

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades 1 y 2 de los límites

a. $\lim_{x \rightarrow 2} 7 = 7$; $\lim_{x \rightarrow -5} 7 = 7$

b. $\lim_{x \rightarrow 6} x^2 = 6^2 = 36$

c. $\lim_{t \rightarrow -2} t^4 = (-2)^4 = 16$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

Algunas otras propiedades de los límites son las siguientes:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces

3.
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Esto es, el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

4.
$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Esto es, el límite de un producto es el producto de los límites.

5. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, donde c es una constante

Esto es, el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

El volumen de helio en un globo esférico (en centímetros cúbicos), como una función del radio r en centímetros, está dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre $\lim_{r \rightarrow 1} V(r)$.

● **EJEMPLO 4 Aplicación de las propiedades de los límites**

a. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x$ (Propiedad 3)
 $= 2^2 + 2 = 6$ (Propiedad 2)

b. La propiedad 3 puede aplicarse por extensión al límite de un número finito de sumas y diferencias. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow -1} (q^3 - q + 1) &= \lim_{q \rightarrow -1} q^3 - \lim_{q \rightarrow -1} q + \lim_{q \rightarrow -1} 1 \\ &= (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 \end{aligned}$$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} [(x + 1)(x - 3)] = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)$ (Propiedad 4)
 $= [\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1] \cdot [\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3]$
 $= (2 + 1) \cdot (2 - 3) = 3(-1) = -3$

d. $\lim_{x \rightarrow -2} 3x^3 = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow -2} x^3$ (Propiedad 5)
 $= 3(-2)^3 = -24$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11 ●●

● **EJEMPLO 5 Límite de una función polinomial**

Sea $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ una función polinomial. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0) \\ &= c_n \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^n + c_{n-1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + \dots + c_1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} c_0 \\ &= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0 = f(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene la propiedad siguiente:

Si f es una función polinomial, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

En otras palabras, si f es un polinomio y a es cualquier número, entonces las dos formas de asociar un número con el par (f, a) , a saber, la evaluación y la formación del límite, existen y son iguales.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13 ●●

El resultado del ejemplo 5 permite encontrar muchos límites simplemente por evaluación. Por ejemplo, puede encontrarse

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 + 4x^2 - 7)$$

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

LÍMITE DE UN POLINOMIO

La función de ingreso para cierto producto está dado por $R(x) = 500x - 6x^2$. Determine el $\lim_{x \rightarrow 8} R(x)$.

al sustituir -3 por x , porque $x^3 + 4x^2 - 7$ es una función polinomial:

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 + 4x^2 - 7) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 7 = 2$$

Del mismo modo,

$$\lim_{h \rightarrow 3} [2(h - 1)] = 2(3 - 1) = 4$$

Es necesario especificar que no se calculan los límites con sólo evaluar o “sustituir”, a menos que exista alguna regla que cubra la situación. Fue posible encontrar los dos límites anteriores por sustitución directa porque se tiene una regla que se aplica a límites de funciones polinomiales. Sin embargo, el uso indiscriminado de la sustitución puede conducir a resultados erróneos. Para ilustrarlo, en el ejemplo 1 (b) se tiene $f(1) = 3$, que no es el $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; en el ejemplo 2(a), $f(-2) = 2$, que no es el $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Las siguientes dos propiedades de límites tienen que ver con cocientes y raíces.

Si el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Esto es, el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el denominador no tenga un límite de 0.

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (\text{Vea la nota 1 al pie de página})$$



ADVERTENCIA

Observe que en el ejemplo 6(a) el numerador y el denominador de la función son polinomios. En general, puede determinarse el límite de una función racional mediante evaluación, siempre que el denominador no sea 0 en a .

● EJEMPLO 6 Aplicación de las propiedades 6 y 7 de los límites

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 4)} = \frac{2 + 1 - 3}{1 + 4} = \frac{0}{5} = 0$
- $\lim_{t \rightarrow 4} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow 4} (t^2 + 1)} = \sqrt{17}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{x^2 + 7} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7)} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15 ●●●

Límites y manipulación algebraica

Ahora se considerarán límites para los cuales las propiedades de los límites no aplican, y que no pueden determinarse mediante evaluación. Un resultado fundamental es el siguiente:

Si f y g son dos funciones para las cuales $f(x) = g(x)$, para toda $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(lo que significa que si alguno de los límites existe, entonces el otro también existe y son iguales).



ADVERTENCIA

La condición para la igualdad de los límites no excluye la posibilidad de que $f(a) = g(a)$. La condición sólo concierne a $x \neq a$.

El resultado surge directamente de la definición de límite, puesto que el valor de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ depende sólo de los valores de $f(x)$ para x que están muy cerca de a . De nuevo: la evaluación de f en a , $f(a)$, o su no existencia, es irrelevante en la determi-

¹Si n es par, se requiere que el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ sea positivo.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

APLICACIÓN DE UNA PROPIEDAD DE LOS LÍMITES

La tasa de cambio de la productividad p (en número de unidades producidas por hora) aumenta con el tiempo de trabajo de acuerdo con la función

$$p(t) = \frac{50(t^2 + 4t)}{t^2 + 3t + 20}$$

Encuentre el $\lim_{t \rightarrow 2} p(t)$.

nación de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a menos que se tenga una regla específica que sea aplicable, como en el caso donde f es un polinomio.

● **EJEMPLO 7 Determinación de un límite**

Determine $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Solución: Cuando $x \rightarrow -1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero. Debido a que el límite del denominador es 0, *no es posible* utilizar la propiedad 6. Sin embargo, lo que le suceda al cociente cuando x es igual a -1 no tiene interés, puede suponerse que $x \neq -1$ y simplificar la fracción:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1 \quad \text{para } x \neq -1$$

Esta manipulación algebraica (factorización y cancelación) de la función original $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ da lugar a una nueva función $x - 1$, que es igual a la función original para $x \neq -1$. Por lo tanto, es aplicable el resultado fundamental mostrado en la página anterior y se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

Observe que, aunque la función original no está definida en -1 , *tiene* un límite cuando $x \rightarrow -1$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21 ●●

En tanto $f(x)$ como $g(x)$ se aproximen a 0 cuando $x \rightarrow a$, entonces se dice que el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene la *forma* $0/0$. De manera similar, se habla de la *forma* $k/0$, para $k \neq 0$ si $f(x)$ se aproxima a $k \neq 0$ a medida que $x \rightarrow a$ pero $g(x)$ se aproxima a 0 cuando $x \rightarrow a$.

En el ejemplo 7, el método para encontrar un límite mediante evaluación no funciona. Al reemplazar x por -1 se obtiene $0/0$, lo cual carece de significado. Cuando surge la forma indeterminada $0/0$, la operación algebraica (como en el ejemplo 7) puede resultar en una función que concuerde con la función original, excepto en el valor limitante. En el ejemplo 7, la nueva función, $x - 1$, es un polinomio y su límite *puede* determinarse mediante sustitución.

Al inicio de esta sección, se encontró que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

por inspección de una tabla de valores de la función $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$, y también después de considerar la gráfica de f . Este límite tiene la forma $0/0$. Ahora el límite se determinará mediante la técnica descrita en el ejemplo 7.

● **EJEMPLO 8 Forma $0/0$**

Encuentre $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Solución: Cuando $x \rightarrow 1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0. De esta manera, se tratará de expresar el cociente en una forma diferente para $x \neq 1$. Al factorizar se tiene

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = x^2 + x + 1 \quad \text{para } x \neq 1$$

(Alternativamente, la división larga daría el mismo resultado.) Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

como se mostró antes.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23 ●●



ADVERTENCIA

Con frecuencia existe confusión acerca de cuál es el principio que se usa en este ejemplo y en el ejemplo 7. Éste es:

Si $f(x) = g(x)$ para $x \neq a$,
entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

FORMA 0/0

La longitud de un material aumenta cuando se calienta, de acuerdo con la ecuación $l = 125 + 2x$. La tasa a la cual se incrementa la longitud está dada por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{125 + 2(x+h) - (125 + 2x)}{h}$$

Calcule este límite.

La expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se llama *cociente de diferencias*. El límite del cociente de diferencias se encuentra en la esencia del cálculo diferencial. Encontrará tales límites en el capítulo 9.

Se utilizará este límite en el capítulo 10.

EJEMPLO 9 Forma 0/0

Si $f(x) = x^2 + 1$, encuentre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Solución:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h}$$

Aquí se trata a x como una constante porque h , no x , cambia. Cuando $h \rightarrow 0$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0. Por lo tanto, se tratará de expresar el cociente en forma tal que $h \neq 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^2 + 2xh + h^2 + 1] - x^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

Nota: En la cuarta igualdad anterior, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)$, se usa el resultado fundamental. Cuando $\frac{h(2x+h)}{h}$ y $2x+h$ se consideran como *funciones* de h , se ven como iguales, para toda $h \neq 0$. Se sigue que sus límites son iguales cuando h se aproxima a 0.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

Un límite especial

Se concluye esta sección con una nota concerniente a uno de los límites más importantes, a saber

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

En la figura 8.9 se muestra la gráfica de $f(x) = (1+x)^{1/x}$. Aunque $f(0)$ no existe, cuando $x \rightarrow 0$ resulta claro que el límite de $(1+x)^{1/x}$ sí existe. Es aproximadamente 2.71828, y se denota por la letra e . Ésta, como recordará, es la base del sistema de los logaritmos naturales. El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

en realidad puede considerarse como la definición de e . Puede mostrarse que esto concuerda con la definición de e que se dio en la sección 6.1.

x	$(1+x)^{1/x}$	x	$(1+x)^{1/x}$
0.5	2.2500	-0.5	4.0000
0.1	2.5937	-0.1	2.8680
0.01	2.7048	-0.01	2.7320
0.001	2.7169	-0.001	2.7196

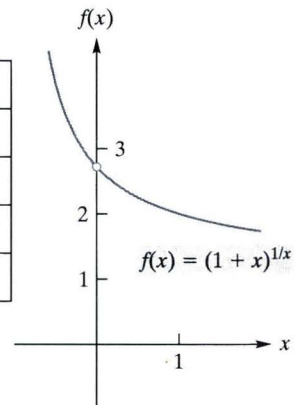


FIGURA 8.9 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Problemas 8.1

En los problemas 1 a 4, utilice la gráfica de f para estimar cada límite, si existe.

- *1. La gráfica de f aparece en la figura 8.10.
 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

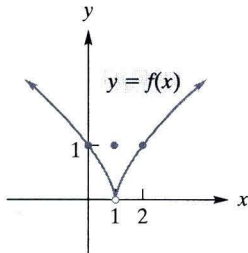


FIGURA 8.10 Diagrama para el problema 1.

2. La gráfica de f aparece en la figura 8.11.
 (a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

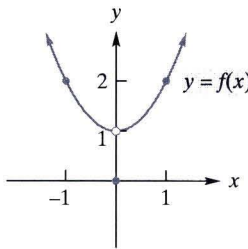


FIGURA 8.11 Diagrama para el problema 2.

- *3. La gráfica de f aparece en la figura 8.12.
 (a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

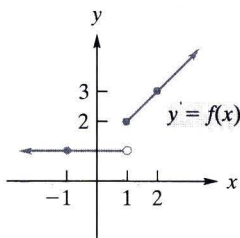


FIGURA 8.12 Diagrama para el problema 3.

4. La gráfica de f aparece en la figura 8.13.
 (a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

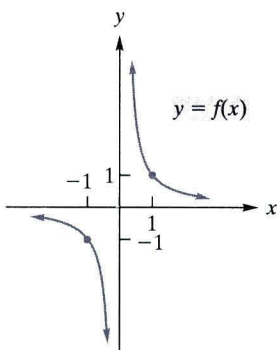


FIGURA 8.13 Diagrama para el problema 4.

En los problemas 5 a 8, utilice su calculadora para completar la tabla, y use los resultados para estimar el límite dado.

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1}$

x	-0.9	-0.99	-0.999	-1.001	-1.01	-1.1
$f(x)$						

6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$						

*7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

h	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

Encuentre los límites en los problemas 9 a 34.

- *9. $\lim_{x \rightarrow 2} 16$ 10. $\lim_{x \rightarrow 3} 2x$
 *11. $\lim_{t \rightarrow -5} (t^2 - 5)$ 12. $\lim_{t \rightarrow 1/3} (5t - 7)$
 *13. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^3 - 4x^2 + 2x - 3)$ 14. $\lim_{r \rightarrow 9} \frac{4r - 3}{11}$
 *15. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t - 2}{t + 5}$ 16. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 6}{x - 6}$
 *17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h^2 - 7h + 1}$ 18. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 5z - 4}{z^2 + 1}$
 19. $\lim_{p \rightarrow 4} \sqrt{p^2 + p + 5}$ 20. $\lim_{y \rightarrow 15} \sqrt{y + 3}$
 *21. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$ 22. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x + 1}$
 *23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ 24. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 3t^2}{t^3 - 4t^2}$
 *25. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ 26. $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2}$
 27. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$ 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$
 29. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 3x - 4}$ 30. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 81}{x^2 + 8x + 15}$
 *31. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 + 5x - 14}$ 32. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 5x + 4}$
 33. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$ 34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$

- *35. Encuentre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ trate a x como una constante.
 36. Encuentre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) + 7(x+h) - 3x^2 - 7x}{h}$ trate a x como una constante.

En los problemas 37 a 42, encuentre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

37. $f(x) = 7 - 3x$ 38. $f(x) = 2x + 3$
 39. $f(x) = x^2 - 3$ 40. $f(x) = x^2 + x + 1$
 *41. $f(x) = x^3 - 4x^2$ 42. $f(x) = 3 - x + 4x^2$

43. Encuentre $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$. (Una pista: Primero racionalice el numerador al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{x-2} + 2$).
44. Encuentre la constante c tal que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + c}{x^2 - 5x + 6}$ exista. Para ese valor de c , determine el límite. (Una pista: Encuentre el valor de c para el cual $x - 3$ es un factor del numerador).
45. **Planta de energía** La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por

$$E = \frac{T_h - T_c}{T_h}$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío. Encuentre (a) $\lim_{T_c \rightarrow 0} E$ y (b) $\lim_{T_c \rightarrow T_h} E$.

46. **Satélite** Cuando un satélite de 3200 libras gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r pies, la energía total mecánica E del sistema Tierra-satélite está dada por

$$E = -\frac{7.0 \times 10^{17}}{r} \text{ pie-lb}$$

Encuentre el límite de E cuando $r \rightarrow 7.5 \times 10^7$ pies.

En los problemas 47 a 50, utilice una calculadora graficadora para graficar las funciones y luego estime los límites. Redondee sus respuestas a dos decimales.

47. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^3 - 24}{x^2 - 4}$
48. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
49. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 10\sqrt{x} + 21}{3 - \sqrt{x}}$
50. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$

51. **Purificación de agua** El costo de purificar agua está dado por $C = \frac{50\,000}{p} - 6500$ donde p es el porcentaje de impurezas que quedan después de la purificación. Grafique esta función en su calculadora graficadora, y determine $\lim_{p \rightarrow 0} C$. Analice el significado de dicho límite.

52. **Función de utilidad** La función de utilidad para un cierto negocio está dada por $P(x) = 224x - 3.1x^2 - 800$. Grafique esta función en su calculadora graficadora, y use la función de evaluación para determinar $\lim_{x \rightarrow 53.2} P(x)$, utilice la regla sobre el límite de una función polinomial.

OBJETIVO

Estudiar los límites laterales, límites infinitos y límites al infinito.

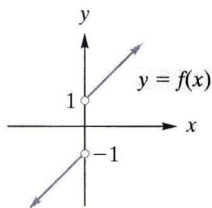


FIGURA 8.14 El $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

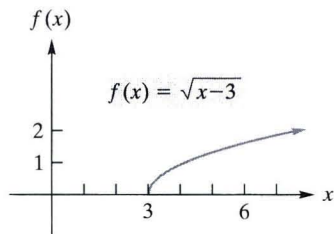


FIGURA 8.15 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$.

8.2 Límites (continuación)

Límites laterales

En la figura 8.14 se muestra la gráfica de un función f . Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. Cuando x tiende a 0 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 1. Esto se escribe como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Por otra parte, cuando x tiende a 0 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a -1 y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Los límites de este tipo se conocen como **límites unilaterales**. Como se mencionó en la sección anterior, el límite de una función como $x \rightarrow a$ es independiente del modo en que x se aproxima a a . Por lo tanto, el límite existirá si y sólo si ambos límites existen y son iguales. Entonces se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

Otro ejemplo de un límite unilateral, considere $f(x) = \sqrt{x-3}$ cuando x tiende a 3. Como f está definida cuando $x \geq 3$, puede hablarse del límite cuando x tiende a 3 por la derecha. Si x es un poco mayor que 3, entonces $x - 3$ es un número positivo cercano a 0 y de este modo $\sqrt{x-3}$ es cercano a 0. Se concluye que

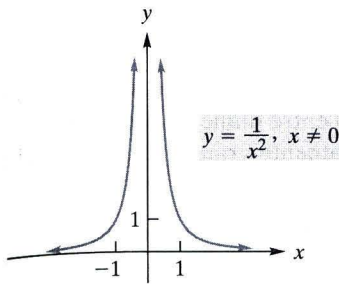
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$$

Este límite también es evidente si se observa la figura 8.15.

Límites infinitos

En la sección anterior se consideraron límites de la forma $0/0$; esto es, límites en los que el numerador y el denominador se aproximan a 0. Ahora se examinarán límites en los cuales el denominador se aproxima a 0, pero el numerador tiende a un número diferente de 0. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$



x	$f(x)$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.1	100
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

FIGURA 8.16 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Aquí, cuando x tiende a 0, el denominador tiende a 0 y el numerador tiende a 1. A continuación se investigará el comportamiento de $f(x) = 1/x^2$ cuando x es cercano a 0. El número x^2 es positivo y también cercano a 0. Por lo tanto, al dividir 1 entre tal número da como resultado un número muy grande. De hecho, entre más cercana a 0 esté x , mayor es el valor de $f(x)$. Por ejemplo, vea la tabla de valores en la figura 8.16, la cual también muestra la gráfica de f . Es claro que cuando $x \rightarrow 0$ tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ aumenta indefinidamente. De aquí que no exista el límite en 0. Se dice que cuando $x \rightarrow 0$, $f(x)$ se vuelve infinito positivamente, y en forma simbólica se expresa este “límite infinito” al escribir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe, puede que la razón no sea que los valores de $f(x)$ se vuelvan arbitrariamente grandes cuando x se acerca a a . Por ejemplo, vea de nuevo la situación del ejemplo 2 de la sección 8.1. Aquí se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ no existe, pero } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq \infty$$

Ahora considere la gráfica de $y = f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$. (Vea la figura 8.17). Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, $1/x$ se hace infinito positivo; cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, $1/x$ tiende a infinito negativo. En forma simbólica estos límites infinitos se escriben

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

x	$f(x)$
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10 000
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10 000

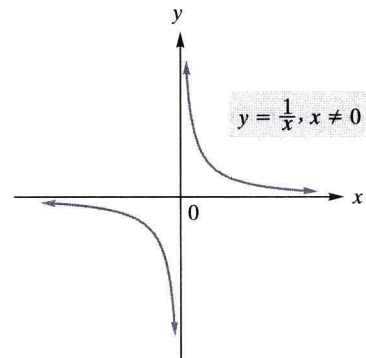


FIGURA 8.17 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Cualquiera de estos dos hechos implican que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ no existe}$$

● EJEMPLO 1 Límites infinitos

Encuentre el límite (si existe).

a. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1}$

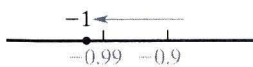


FIGURA 8.18 $x \rightarrow -1^+$.

Solución: Cuando x tiende a -1 por la derecha (piense en valores de x como -0.9 , -0.99 , y así sucesivamente, como se muestra en la figura 8.18), $x + 1$ tiende a 0 pero siempre es positivo. Como se divide 2 entre números positivos que se aproximan a 0, los resultados, $2/(x + 1)$ son números positivos que se vuelven arbitrariamente grandes. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1} = \infty$$

y el límite no existe. Por un análisis similar, usted debe ser capaz de demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty$$



ADVERTENCIA

El uso del signo “igual” en esta situación no significa que el límite exista; por el contrario, el símbolo (∞) aquí es una manera de especificar que no hay límite, e indica por qué no existe.

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-4}$

Solución: Cuando $x \rightarrow 2$, el numerador tiende a 4 y el denominador se aproxima a 0. Por lo tanto, se dividen números cercanos a 4 entre números cercanos a 0. Los resultados son números que se vuelven arbitrariamente grandes en magnitud. En esta fase puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-4} \text{ no existe}$$

Sin embargo, se evaluará si es posible utilizar el símbolo ∞ o $-\infty$ para ser más específicos acerca del “no existe”. Observe que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-4} \text{ no es } \infty \text{ ni } -\infty.$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

En el ejemplo 1 se consideraron límites de la forma $k/0$ donde $k \neq 0$. Es importante que distinga la forma $k/0$ de la forma $0/0$, que se estudió en la sección 8.1. Las dos se manejan de una manera muy diferente.

● EJEMPLO 2 Determinación de un límite

Encuentre $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{t^2-4}$.

Solución: Cuando $t \rightarrow 2$, tanto el numerador como el denominador, tienden a 0 (forma $0/0$). Así, primero se simplifica la fracción, como se hizo en la sección 8.1, y luego se toma el límite:

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{t^2-4} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

Límites al infinito

Ahora se examina la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Usted debe ser capaz de obtener

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$ sin la ayuda de una gráfica o de una tabla. Al dividir 1 entre un número positivo grande se obtiene como resultado un positivo pequeño, y cuando el divisor se hace arbitrariamente grande, los cocientes se vuelven arbitrariamente pequeños. Un argumento similar puede hacerse para el límite cuando $x \rightarrow -\infty$.

cuando x se vuelve infinito, primero en sentido positivo y después en sentido negativo. En la tabla 8.2 puede verse que cuando x aumenta indefinidamente al tomar valores positivos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. De la misma manera, cuando x disminuye indefinidamente al tomar valores negativos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. Estas observaciones son claras al ver la gráfica de la figura 8.17. Allí, cuando usted se mueve a la derecha sobre la curva y toma valores positivos de x , los correspondientes valores de y se aproximan a 0. De manera similar, cuando se mueve hacia la izquierda a lo largo

TABLA 8.2 Comportamiento de $f(x)$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1000	0.001	-1000	-0.001
10 000	0.0001	-10 000	-0.0001
100 000	0.00001	-100 000	-0.00001
1 000 000	0.000001	-1 000 000	-0.000001

de la curva a través de valores negativos de x , los correspondientes valores de y se aproximan a 0. En forma simbólica, se escribe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Estos límites se conocen como *límites al infinito*.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

LÍMITES AL INFINITO

La función de demanda para cierto producto está dada por $p(x) = \frac{10\,000}{(x+1)^2}$, donde p es el precio en dólares y x es la cantidad vendida. Grafique esta función en su calculadora graficadora en la ventana $[0, 10] \times [0, 10\,000]$. Utilice la función Trace para encontrar $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$. Determine lo que le sucede a la gráfica y lo que esto significa con respecto a la función de demanda.

EJEMPLO 3 Límites al infinito

Encuentre el límite (si existe).

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-5)^3}$

Solución: Cuando x se vuelve muy grande, también se incrementa $x - 5$. Como el cubo de un número grande también es grande, $(x - 5)^3 \rightarrow \infty$. Al dividir 4 entre números muy grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-5)^3} = 0$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4-x}$

Solución: Cuando x se hace cada vez más negativa, $4 - x$ tiende a infinito positivo. Debido a que la raíz cuadrada de números grandes son números grandes, se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4-x} = \infty$$

En el siguiente análisis se necesitará un cierto límite, a saber, $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^p$ donde $p > 0$. Conforme x se vuelve muy grande, también se incrementa x^p . Al dividir 1 entre números grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Así $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^p = 0$. En general,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

donde $p > 0$.² Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$$

Ahora se encontrará el límite de la función racional

$$f(x) = \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1}$$

cuando $x \rightarrow \infty$. (Recuerde que se mencionó en la sección 3.2 que una función racional es un cociente de polinomios). A medida que x se vuelve cada vez más grande, *ambos*, numerador y denominador de $f(x)$, tienden a infinito. Sin embargo, la forma del cociente puede modificarse de modo que se pueda sacar una conclusión de si tiene o no límite. Para hacer esto, se divide el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que aparezca en el denominador. En este caso es x^2 . Esto da

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 5}{x^2}}{\frac{2x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 + 5 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

²Para $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^p$, se supone que p es tal que $1/x^p$ está definida para $x < 0$.

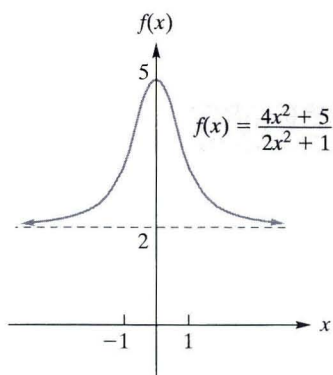


FIGURA 8.19 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^p = 0$ para $p > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \frac{4 + 5(0)}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2$$

De manera similar, el límite cuando $x \rightarrow -\infty$ es 2. Estos límites son claros si se observa la gráfica de f en la figura 8.19.

Para la función anterior, hay una manera más sencilla de encontrar el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Para valores *grandes* de x , el término que incluye la potencia más grande de x en el numerador, a saber $4x^2$, domina la suma $4x^2 + 5$, y el término dominante en el denominador, $2x^2 + 1$, es $2x^2$. Por lo tanto, cuando $x \rightarrow \infty$, $f(x)$ puede aproximarse como $(4x^2)/(2x^2)$. Como resultado, para determinar el límite de $f(x)$, basta determinar el límite de $(4x^2)/(2x^2)$. Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

como se vio antes. En general, se tiene la regla siguiente:

Límites al infinito de funciones racionales

Si $f(x)$ es una *función racional* y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos en el numerador y denominador, respectivamente, con las mayores potencias de x , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Ahora se aplicará esta regla a la situación donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x}{5 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} x^3 \right) = \infty$$

(Observe que en el último paso, cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3 , además, $-\frac{1}{2}$ por un número muy negativo resulta ser muy positivo.) De manera similar,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{5 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} x^3 \right) = -\infty$$

De esta ilustración se llega a la conclusión siguiente:

Si el grado del numerador de una *función racional* es mayor que el del denominador, entonces la función no tiene límite cuando $x \rightarrow \infty$ y no tiene límite cuando $x \rightarrow -\infty$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

LÍMITES AL INFINITO PARA FUNCIONES RACIONALES

Los montos anuales de ventas y de cierta compañía (en miles de dólares) están relacionados con la cantidad de dinero que gasta en publicidad, x (en miles de dólares), de acuerdo con la ecuación $y(x) = \frac{500x}{x+20}$. Grafique esta función en su calculadora graficadora en la ventana $[0, 1000] \times [0, 550]$. Utilice Trace para explorar $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$, y determine qué significa esto para la empresa.

EJEMPLO 4 Límites al infinito de funciones racionales

Encuentra el límite (si existe).

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{8x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(3x - 1)^2}$

Solución: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(3x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{9x^2 - 6x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{9x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{9x} = \frac{1}{9} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{9}(0) = 0$$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^4}{x^4 - x^3 + 2}$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no existe el límite. Con mayor precisión,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^4}{x^4 - x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21



ADVERTENCIA

La técnica anterior sólo se aplica a límites al infinito de funciones racionales.

Para encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2}$, no se puede simplemente determinar el límite de $\frac{x^2}{8x^2}$. Esta simplificación se aplica sencillamente en el caso $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$. En lugar de eso, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2} = \frac{0 - 1}{7 - 0 + 0} = -\frac{1}{7}$$

Ahora se considera el límite de la función polinomial $f(x) = 8x^2 - 2x$ cuando $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (8x^2 - 2x)$$

Debido a que un polinomio es una función racional con denominador 1, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (8x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 2x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} 8x^2$$

Es decir, el límite de $8x^2 - 2x$ cuando $x \rightarrow \infty$ es el mismo que el límite del término que incluye a la mayor potencia de x , a saber, $8x^2$. Cuando x se vuelve muy grande, también se incrementa $8x^2$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (8x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 8x^2 = \infty$$

En general, se tiene lo siguiente:

Cuando $x \rightarrow \infty$ (o $x \rightarrow -\infty$), el límite de una *función polinomial* es el mismo que el de su término que involucra la mayor potencia de x .

● **EJEMPLO 5 Límites al infinito para funciones polinomiales**

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$. Si x se vuelve muy negativa, también x^3 . Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = \infty$, porque -2 por un número muy negativo es un número positivo muy grande.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

LÍMITES AL INFINITO PARA FUNCIONES POLINOMIALES

El costo C de producir x unidades de cierto producto está dado por $C(x) = 50\,000 + 200x + 0.3x^2$. Utilice su calculadora graficadora para explorar $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x)$ y determine lo que esto significa.

No utilice los términos dominantes cuando una función no es racional.

La técnica de enfocarse en los términos dominantes para encontrar los límites cuando $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow -\infty$ es válida para *funciones racionales*, pero no es necesariamente válida para otros tipos de funciones. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \tag{1}$$

Observe que $\sqrt{x^2 + x} - x$ no es una función racional. Es *incorrecto* inferir que como x^2 domina en $x^2 + x$, el límite en (1) es el mismo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Puede demostrarse (vea el problema 62) que el límite en (1) no es 0, sino $\frac{1}{2}$.

Las ideas presentadas en esta sección se aplicarán ahora a una función definida por partes.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

LÍMITES PARA UNA FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Un plomero cobra \$100 por la primera hora de trabajo a domicilio y \$75 por cada hora (o fracción) posterior. La función de lo que le cuesta una visita de x horas es

$$f(x) = \begin{cases} \$100 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \$175 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \$250 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \$325 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Encuentre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2.5} f(x)$.

● EJEMPLO 6 Límites para una función definida por partes

Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$, encuentre el límite (si existe).

a. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Solución: Aquí x se acerca a 1 por la derecha. Para $x > 1$, se tiene $f(x) = x^2 + 1$. Por lo que,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1)$$

Si x es mayor que 1, pero cercano a 1, entonces $x^2 + 1$ se acerca a 2. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Solución: Aquí x se acerca a 1 por la izquierda. Para $x < 1$, $f(x) = 3$. De aquí que,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = 3$$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solución: Se quiere encontrar el límite cuando x se aproxima a 1. Sin embargo, de la regla de la función dependerá si $x \geq 1$ o $x < 1$. Así, deben considerarse los límites unilaterales. El límite cuando x se aproxima a 1 existirá si y sólo si ambos límites unilaterales existen y son iguales. De los incisos (a) y (b),

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{porque } 2 \neq 3$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{no existe}$$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Solución: Para valores muy grandes de x , se tiene $x \geq 1$, de modo que $f(x) = x^2 + 1$. Así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solución: Para valores muy negativos de x , se tiene $x < 1$, de modo que $f(x) = 3$. Por lo que,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$$

Todos los límites de las partes de la (a) a la (c) deben quedar claros a partir de la gráfica de f en la figura 8.20.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 57 ●●●

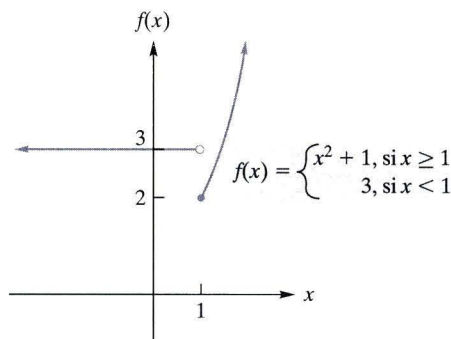


FIGURA 8.20 Gráfica de la función definida por partes.

Problemas 8.2

1. Para la función f dada en la figura 8.21, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

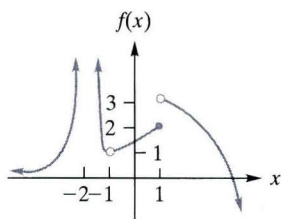


FIGURA 8.21 Diagrama para el problema 1.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ | (h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ |
| (i) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ | (j) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ |
| (k) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ | |

2. Para la función f dada en la figura 8.22, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

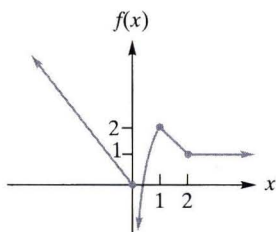


FIGURA 8.22 Diagrama para el problema 2.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | |

En los problemas 3 a 54, encuentre el límite. Si no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

- | | |
|--|--|
| 3. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2)$ | 4. $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - x^2)$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x$ | 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 19$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x}{x^4}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{x - 1}$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$ | 10. $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - 1)^3$ |
| 11. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{h}$ | 12. $\lim_{h \rightarrow 5^-} \sqrt{5 - h}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-3}{x + 2}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/2}$ |
| 15. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4\sqrt{x - 1})$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x\sqrt{x^2 - 4})$ |

- | | |
|--|---|
| 17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + 10}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - 10x}$ |
| 19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$ | 20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{5x\sqrt[3]{x}}$ |
| *21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 8}{x - 3}$ | 22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 4}{3 - 2x}$ |
| *23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 4x - 3}$ | 24. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^3}{r^2 + 1}$ |
| *25. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^3 + 2t^2 + 9t - 1}{5t^2 - 5}$ | 26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{3x^7 - x^3 + 4}$ |
| 27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{2x + 1}$ | 28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(4x - 1)^3}$ |
| 29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x - 2x^3}{5x^3 - 8x + 1}$ | 30. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x - 2x^3}{7 - 5x^3 + 2x^2}$ |
| *31. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$ | 32. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x}{9 - x^2}$ |
| 33. $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{2w^2 - 3w + 4}{5w^2 + 7w - 1}$ | 34. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^3}{x^3 - 1}$ |
| 35. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 4x^2 + x^3}{4 + 5x - 7x^2}$ | 36. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^3}{x^3 + x + 1}$ |
| *37. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5x^2 + 14x - 3}{x^2 + 3x}$ | 38. $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 4t + 3}{t^2 - 2t - 3}$ |
| 39. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ | 40. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 - x^2}{2x + 1}$ |
| 41. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{x - 1}\right)$ | 42. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5 + 2x^3 - 1}{x^5 - 4x^2}$ |
| 43. $\lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 49}}$ | 44. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{\sqrt{16 - x^4}}$ |
| 45. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x + x^2}$ | 46. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)$ |
| 47. $\lim_{x \rightarrow 1} x(x - 1)^{-1}$ | 48. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{1}{2x - 1}$ |
| 49. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-5}{1 - x}\right)$ | 50. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-7}{x - 3}\right)$ |
| 51. $\lim_{x \rightarrow 0} x $ | 52. $\lim_{x \rightarrow 0} \left \frac{1}{x}\right $ |
| 53. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x}$ | 54. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} - \frac{2x^2}{x^2 + 1}\right)$ |

En los problemas 55 a 58, encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

55. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | |
56. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ -2 + 4x - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | |

57. $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
 (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

58. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
 (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

59. **Costo promedio** Si c es el costo total en dólares para producir q unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad para una producción de q unidades está dado por $\bar{c} = c/q$. Así, si la ecuación de costo total es $c = 5000 + 6q$, entonces

$$\bar{c} = \frac{5000}{q} + 6$$

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es \$5030, y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es \$1006. Por medio de la determinación de $\lim_{q \rightarrow \infty} \bar{c}$, demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

60. **Costo promedio** Repita el problema 59, dado que el costo fijo es \$12 000 y el costo variable está dado por la función $c_v = 7q$.
61. **Población** Se pronostica que la población de cierta ciudad pequeña t años a partir de ahora será

$$N = 50\,000 - \frac{2000}{t + 1}$$

Determine la población a largo plazo, esto es, determine $\lim_{t \rightarrow \infty} N$.

62. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}$$

(Una pista: Racionalice el numerador al multiplicar la expresión $\sqrt{x^2 + x} - x$ por

$$\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

Después exprese el denominador en una forma tal que x sea un factor).

63. **Relación huésped-parásito** Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x , el número de huéspedes parasitados en un periodo es

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}$$

Si la densidad de huésped aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría?

64. Si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x < 2 \\ x^3 + k(x+1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, determine el valor de la constante k para la cual $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe.

En los problemas 65 y 66, utilice una calculadora para evaluar la función dada cuando $x = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001 . Con base en sus resultados, obtenga una conclusión acerca de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

65. $f(x) = x^{2x}$ 66. $f(x) = e^{-1/x}$
67. Grafique $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x)$.
68. Grafique $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x + 3}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$, si existe. Utilice el símbolo ∞ o $-\infty$, si es apropiado.
69. Grafique $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Utilice la gráfica para estimar cada uno de los límites siguientes, si existen:
 (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

OBJETIVO

Estudiar la continuidad y encontrar los puntos de discontinuidad para una función.

8.3 Continuidad

Muchas funciones tienen la propiedad de que no presentan “pausa” alguna en sus gráficas. Por ejemplo compare las funciones

$$f(x) = x \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

cuyas gráficas aparecen en las figuras 8.23 y 8.24, respectivamente. La gráfica de f no tiene pausa, pero la gráfica de g tiene una pausa en $x = 1$. Dicho de otra forma, si usted fuera a trazar ambas gráficas con un lápiz, tendría que despegar el lápiz del papel en la gráfica de g cuando $x = 1$, pero no tendría que despegarlo en la gráfica de f . Estas situaciones pueden expresarse mediante límites. Compare el límite de cada función con el valor de la función en $x = 1$ conforme x se aproxima a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 \neq 2 = g(1)$$

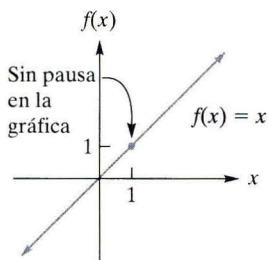


FIGURA 8.23 Continua en 1.

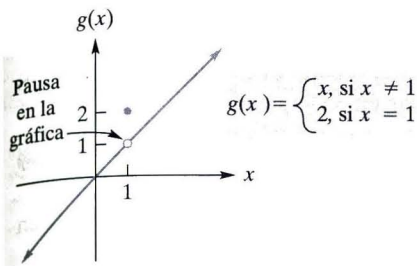


FIGURA 8.24 Discontinua en 1.

En la sección 8.1 se puntualizó que dada una función f y un número a , existen dos formas importantes de asociar un número al par (f, a) . Una es la simple evaluación, $f(a)$, que *existe* precisamente si a está en el dominio de f . La otra forma es $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, cuya existencia y determinación puede ser más desafiante. Para las funciones f y g anteriores, el límite de f a medida que $x \rightarrow 1$ es igual a $f(1)$, pero el límite de g conforme $x \rightarrow 1$ *no* es igual a $g(1)$. Por estas razones se dice que f es *continua* en 1 y g *discontinua* en 1.

DEFINICIÓN

Una función f es **continua** en a si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f no es continua en a , entonces se dice que f es **discontinua** en a , y a se llama **punto de discontinuidad** de f .

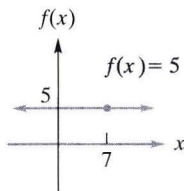


FIGURA 8.25 f es continua en 7.

● **EJEMPLO 1 Aplicación de la definición de continuidad**

a. Muestre que $f(x) = 5$ es continua en 7.

Solución: Debe verificarse que las tres condiciones se cumplan. Primera, $f(7) = 5$, de modo que f está definida en $x = 7$. Segunda,

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} 5 = 5$$

Por ende, f tiene límite cuando $x \rightarrow 7$. Tercera,

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 5 = f(7)$$

Por lo tanto, f es continua en 7. (Vea la figura 8.25.)

b. Demuestre que $g(x) = x^2 - 3$ es continua en -4 .

Solución: La función g está definida en $x = -4$; $g(-4) = 13$. También,

$$\lim_{x \rightarrow -4} g(x) = \lim_{x \rightarrow -4} (x^2 - 3) = 13 = g(-4)$$

Por lo tanto, g es continua en -4 . (Vea la figura 8.26.)

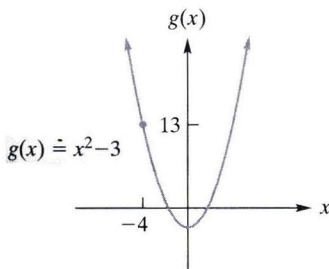


FIGURA 8.26 g es continua en -4 .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 ●●

Se dice que una función es *continua en un intervalo* si es continua en cada punto de ese intervalo. En esta situación, la gráfica de la función es conectada sobre el intervalo. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo $[2, 5]$. De hecho, en el ejemplo 5 de la sección 8.1, se mostró que para *cualquier* función polinomial f , para cualquier número a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Esto significa que

Una función polinomial es continua en todo punto.

Se concluye que tal función es continua en cualquier intervalo. Se dice que las funciones polinomiales son **continuas sobre su dominio** si son continuas en cada punto de su dominio. Si el dominio de tal función es el conjunto de todos los números reales, se puede decir simplemente que la función es continua.

EJEMPLO 2 Continuidad de funciones polinomiales

Las funciones $f(x) = 7$ y $g(x) = x^2 - 9x + 3$ son polinomiales. Por lo tanto, son continuas en su dominio respectivo. Por ejemplo, son continuas en 3.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

¿Cuándo es discontinua una función? Se puede decir que una función f definida en un intervalo abierto que contenga a a es discontinua en a , si

1. f no tiene límite cuando $x \rightarrow a$
o
2. cuando $x \rightarrow a$, f tiene un límite diferente de $f(a)$

Si f no está definida en a , también se dirá en ese caso, que f es discontinua en a . En la figura 8.27 pueden encontrarse por inspección puntos de discontinuidad.

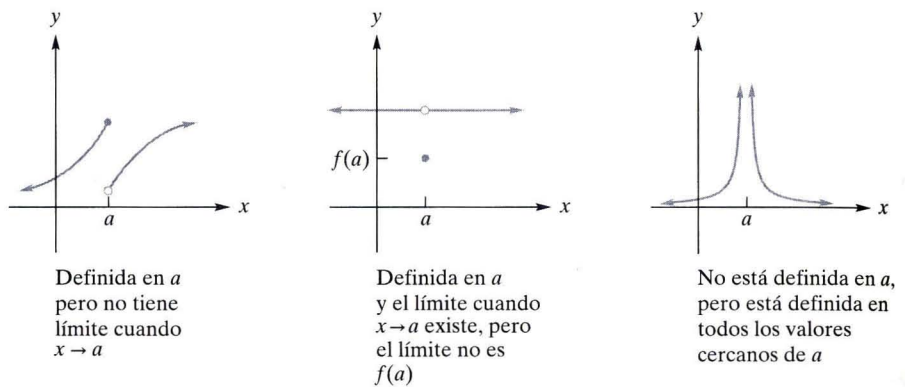


FIGURA 8.27 Discontinuidades en a .

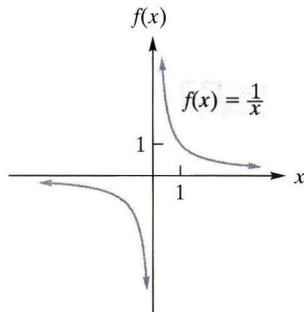


FIGURA 8.28 Discontinuidad infinita en 0.

EJEMPLO 3 Discontinuidades

a. Sea $f(x) = 1/x$. (Vea la figura 8.28). Observe que f no está definida en $x = 0$, pero está definida para cualquier otro valor de x cercana a 0. Así, f es discontinua en 0. Además, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Se dice que una función tiene **discontinuidad infinita** en a , cuando al menos uno de los límites laterales es ∞ o $-\infty$, a medida que $x \rightarrow a$. De aquí que f tenga una *discontinuidad infinita* en $x = 0$.

b. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

(Vea la figura 8.29). Aunque f está definida en $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe. Por lo tanto, f es discontinua en 0.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

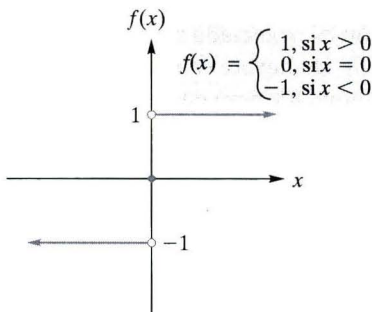


FIGURA 8.29 Función definida por partes discontinua.

La propiedad siguiente indica dónde ocurren las discontinuidades de una función racional.

Discontinuidades de una función racional

Una función racional es discontinua en los puntos donde el denominador es 0, y es continua en cualquier otra parte. Así, una función racional es continua sobre su dominio.

La función racional $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$ es continua sobre su dominio, pero no está definida en -1 . Es discontinua en -1 . La gráfica de f es una línea recta horizontal con un "espacio" en -1 .

EJEMPLO 4 Localización de discontinuidades para funciones racionales

Para cada una de las funciones siguientes, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$

Solución: Esta función racional tiene denominador

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$$

que es 0 cuando $x = -4$ o $x = 2$. Así, f sólo es discontinua en -4 y 2 .

b. $h(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 4}$

Solución: Para esta función racional, el denominador nunca es 0. (Siempre es positivo). De este modo, h no tiene discontinuidad.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

EJEMPLO 5 Localización de discontinuidades en funciones definidas por partes

Para cada una de las funciones siguientes, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

Solución: Las partes que definen la función están dadas por polinomios que son continuos, entonces el único lugar en el que podría haber discontinuidad es en $x = 3$, donde ocurre la separación de las partes. Se sabe que $f(3) = 3 + 6 = 9$. Y puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 6) = 9$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = 9$$

se puede concluir que el $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9 = f(3)$ y la función no tiene puntos de discontinuidad. Se puede obtener la misma conclusión por inspección de la gráfica de f en la figura 8.30.

b. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Solución: Como f no está definida en $x = 2$, es discontinua en 2. Sin embargo, observe que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4 = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

demuestra que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe. (Vea la figura 8.31).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

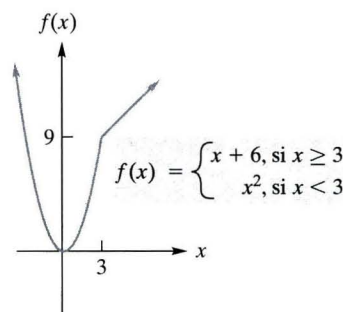


FIGURA 8.30 Función definida por partes continua.

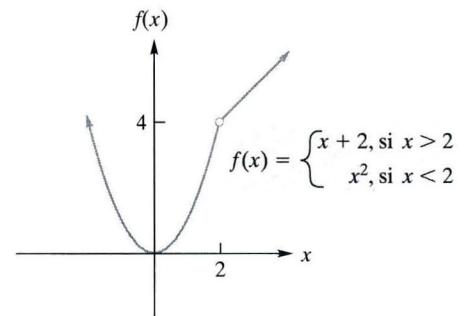


FIGURA 8.31 Discontinua en 2.

● EJEMPLO 6 Función del “servicio postal”

La función del “servicio postal”

$$c = f(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 63 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 87 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 111 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

da el costo c (en centavos) de enviar por primera clase un paquete de peso x (onzas), para $0 < x \leq 4$, en julio de 2006. Es claro en su gráfica de la figura 8.32 que f tiene discontinuidades en 1, 2 y 3, y que es constante para valores de x que están entre discontinuidades sucesivas. Tal función se conoce como *función escalón* debido a la apariencia de su gráfica.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35 ●●●

Hay otra manera de expresar la continuidad aparte de la dada en la definición. Si

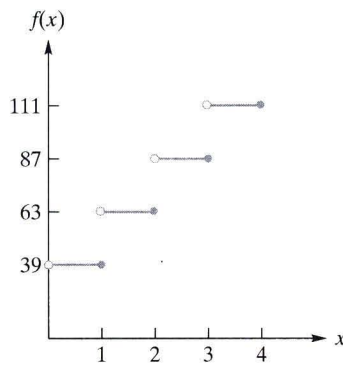


FIGURA 8.32 Función del servicio postal.

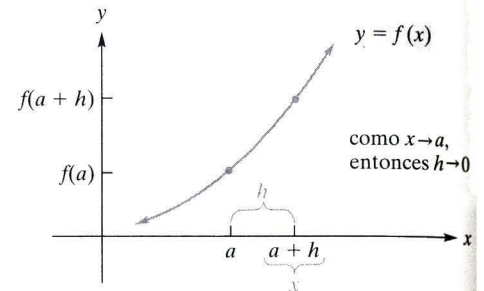


FIGURA 8.33 Diagrama para la continuidad en a .

se toma el enunciado

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

y se reemplaza x por $a + h$, entonces a medida que $x \rightarrow a$, se tiene que $h \rightarrow 0$; y cuando $h \rightarrow 0$ se tiene que $x \rightarrow a$. Se sigue que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$, dado que los límites existen (figura 8.33). Por lo tanto, el enunciado

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

también define continuidad en a si se supone que ambos lados existen.

Se utiliza con frecuencia este método de expresar la continuidad en a en demostraciones matemáticas.

TECNOLOGÍA

Con base en la gráfica de una función se tiene la capacidad de determinar dónde ocurre una discontinuidad. Sin embargo, existe la posibilidad de equivocación. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

es discontinua en ± 1 , pero la discontinuidad en 1 no resulta obvia al observar la gráfica de f en la figura 8.34. Por otra parte, la discontinuidad en -1 es obvia. Observe que f no está definida en -1 ni en 1.

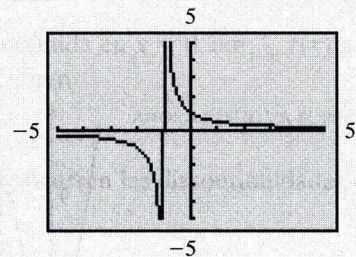
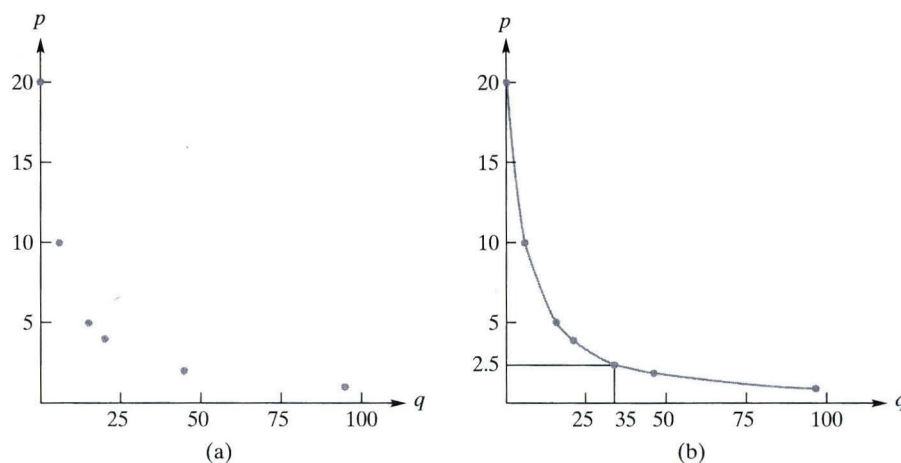


FIGURA 8.34 La discontinuidad en 1 no es evidente a partir de la gráfica de $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

TABLA 8.3 Programa de demanda

Precio/unidad, p	Cantidad/semana, q
\$20	0
10	5
5	15
4	20
2	45
1	95


FIGURA 8.35 Visualización de datos por medio de una función continua.

A menudo es útil describir una situación por medio de una función continua. Por ejemplo, el programa de demanda de la tabla 8.3, indica el número de unidades de un producto que se demandará por semana a diversos precios. Esta información puede proporcionarse de manera gráfica, como en la figura 8.35(a), si se traza cada par cantidad-precio como un punto. Es claro que esta gráfica no representa una función continua. Además, no proporciona información del precio al cual, digamos, 35 unidades serán demandadas. Sin embargo, si se conectan los puntos de la figura 8.35(a) por medio de una curva suave [vea la figura 8.35(b)], se obtiene lo que se conoce como una curva de demanda. De ella podría estimarse que a un precio de \$2.50 aproximadamente por unidad, se demandarían 35 unidades.

Con frecuencia es posible y útil describir una gráfica por medio de una ecuación que define una función continua f , como en la figura 8.35(b). Tal función no sólo proporciona una ecuación de demanda, $p = f(q)$, para anticipar los precios correspondientes a las cantidades demandadas, también permite efectuar un análisis matemático conveniente de las propiedades básicas de la demanda. Por supuesto que se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones como $p = f(q)$. Matemáticamente, f puede estar definida cuando $q = \sqrt{37}$, pero desde un punto de vista práctico, una demanda de $\sqrt{37}$ unidades, podría no tener significado para esta situación particular. Por ejemplo, si una unidad es un huevo, entonces una demanda de $\sqrt{37}$ huevos, no tiene sentido.

Se destaca que las funciones exponenciales y logarítmicas son continuas sobre sus dominios. Así, las funciones exponenciales no tienen discontinuidades, mientras que una función logarítmica tiene sólo una discontinuidad en 0 (que es una discontinuidad infinita).

Problemas 8.3

En los problemas 1 a 6, utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

*1. $f(x) = x^3 - 5x$; $x = 2$ 2. $f(x) = \frac{x-3}{5x}$; $x = -3$

3. $g(x) = \sqrt{2-3x}$; $x = 0$ 4. $f(x) = \frac{x}{8}$; $x = 2$

5. $h(x) = \frac{x-4}{x+4}$; $x = 4$ 6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x = -1$

En los problemas 7 a 12 determine si la función es continua en los puntos dados.

7. $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$; $-2, 0$ 8. $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{6}$; $2, -2$

9. $g(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$; $3, -3$ 10. $h(x) = \frac{3}{x^2+4}$; $2, -2$

11. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$; $2, 0$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$; $0, -1$

En los problemas 13 a 16, dé una razón de por qué la función es continua sobre su dominio.

*13. $f(x) = 2x^2 - 3$ 14. $f(x) = \frac{2+3x-x^2}{5}$

15. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$ 16. $f(x) = x(1-x)$

Encuentre todos los puntos de discontinuidad en los problemas 17 a 34.

17. $f(x) = 3x^2 - 3$ 18. $h(x) = x - 2$

*19. $f(x) = \frac{3}{x+4}$ 20. $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-4}$

21. $g(x) = \frac{(2x^2-3)^3}{-15}$ 22. $f(x) = -1$

23. $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 2x - 15}$

24. $g(x) = \frac{x - 3}{x^2 + x}$

25. $h(x) = \frac{x - 7}{x^3 - x}$

26. $f(x) = \frac{2x - 3}{3 - 2x}$

27. $p(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

28. $f(x) = \frac{x^4}{x^4 - 1}$

*29. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

*31. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x > 2 \\ 3 - 2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \\ 8x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} \frac{16}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

*35. **Tarifas telefónicas** Suponga que la tarifa telefónica de larga distancia para una llamada desde Hazleton, Pennsylvania, a Los Ángeles, California, es de \$0.10 por el primer minuto y de \$0.06 por cada minuto o fracción adicional. Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de t minutos de duración, haga el bosquejo de la gráfica de f para $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$. Utilice esta gráfica para determinar los valores de t en los cuales ocurren discontinuidades, donde $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$.

36. La *función mayor entero*, $(x) = \lfloor x \rfloor$, está definida como el entero más grande que es menor o igual a x , donde x es cualquier número real. Por ejemplo, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 1.999 \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{1}{4} \rfloor = 0$ y $\lfloor -4.5 \rfloor = -5$. Haga el bosquejo de la gráfica de esta función para $-3.5 \leq x \leq 3.5$. Utilice su bosquejo para determinar los valores de x en los cuales ocurren discontinuidades.

37. **Inventario** Haga el bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -100x + 1100 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ -100x + 1600 & \text{si } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

Una función como la anterior podría describir el inventario y de una compañía en el instante x ; ¿ f es continua en 2? ¿ f es continua en 5? ¿ f es continua en 10?

38. Grafique $g(x) = e^{-1/x^2}$. Debido a que g no está definida en $x = 0$, pero sí para todos los valores cercanos a 0, g es discontinua en 0. Con base en la gráfica de g , ¿ f es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

continua en 0?

OBJETIVO

Desarrollar técnicas para resolver desigualdades no lineales.

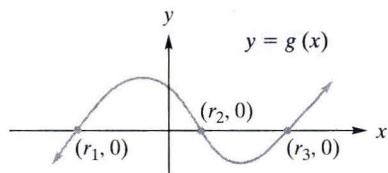


FIGURA 8.36 r_1, r_2 y r_3 son raíces de g .

8.4 Continuidad aplicada a desigualdades

En la sección 1.2 se resolvieron desigualdades lineales. Ahora se verá cómo puede aplicarse la noción de continuidad para resolver una desigualdad no lineal, como $x^2 + 3x - 4 < 0$. Esta habilidad será importante en el estudio del cálculo.

Recuerde (tal y como se mencionó en la sección 3.5) que las intersecciones x de la gráfica de una función g (esto es, los puntos donde la gráfica corta al eje x) tienen coordenadas x que son las raíces de la ecuación $g(x) = 0$. De manera inversa, cualquier raíz de g da lugar a una intersección x de la gráfica de la función. Por lo tanto, a partir de la gráfica de $y = g(x)$ en la figura 8.36, se concluye que r_1, r_2 y r_3 son raíces de g y cualquier otra raíz de g dará lugar a intersecciones en x (más allá de lo que realmente se muestra en la gráfica). Suponga que efectivamente se muestran todas las raíces de g , y por ende todas las intersecciones x . Note además en la figura 8.36 que las tres raíces determinan cuatro intervalos abiertos sobre el eje x :

$$(-\infty, r_1) \quad (r_1, r_2) \quad (r_2, r_3) \quad (r_3, \infty)$$

Para resolver $x^2 + 3x - 4 > 0$, se hace

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

Debido a que f es una función polinomial, es continua. Las raíces de f son -4 y 1 ; de aquí que la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x , $(-4, 0)$ y $(1, 0)$. (Vea la figura 8.37). Las raíces determinan tres intervalos sobre el eje x :

$$(-\infty, -4) \quad (-4, 1) \quad (1, \infty)$$

Considere el intervalo $(-\infty, -4)$. Como f es continua en este intervalo, se afirma que $f(x) > 0$, o bien, $f(x) < 0$ en *todo* el intervalo. Si no fuera éste el caso, entonces $f(x)$ realmente cambiaría de signo en el intervalo. Debido a la continuidad de f , habría un punto donde la gráfica intersecaría al eje x , por ejemplo, en $(x_0, 0)$. (Vea la figura 8.38). Pero, entonces x_0 sería una raíz de f . Sin embargo, esto no puede ser porque no hay raíces de f menores que -4 . De aquí que $f(x)$ debe ser estrictamente positiva o estrictamente negativa en $(-\infty, -4)$. Se puede enunciar un argumento similar para cada uno de los otros intervalos.

Para determinar el signo de $f(x)$ en cualquiera de los tres intervalos, es suficiente con determinarlo en cualquier punto del intervalo. Por ejemplo, -5 está en $(-\infty, -4)$ y

$$f(-5) = 6 > 0 \quad \text{Entonces } f(x) > 0 \text{ en } (-\infty, -4)$$

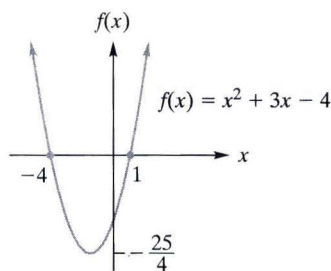


FIGURA 8.37 -4 y 1 son raíces de f .

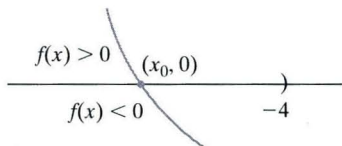


FIGURA 8.38 Cambio de signo para una función continua.

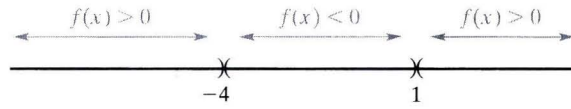


FIGURA 8.39 Diagrama de signos para $x^2 + 3x - 4$.

De manera similar, 0 está en $(-4, 1)$ y

$$f(0) = -4 < 0 \quad \text{Entonces } f(x) < 0 \text{ en } (-4, 1)$$

Por último, 3 está en $(1, \infty)$ y

$$f(3) = 14 > 0 \quad \text{Entonces } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty)$$

(Vea el “diagrama de signos” en la figura 8.39). Por lo tanto,

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \text{ en } (-\infty, -4) \text{ y } (1, \infty)$$

de modo que se ha resuelto la desigualdad. Estos resultados son obvios a partir de la gráfica de la figura 8.37. La gráfica está por arriba del eje x (esto es, $f(x) > 0$) en $(-\infty, -4)$ y en $(1, \infty)$.

● EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resuelva $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Solución: Si $f(x) = x^2 - 3x - 10$, entonces f es una función polinomial (cuadrática) y, por lo tanto, continua en todas partes. Para encontrar las raíces reales de f , se tiene

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ (x + 2)(x - 5) &= 0 \\ x &= -2.5 \end{aligned}$$

Las raíces -2 y 5 se muestran en la figura 8.40. Estas raíces determinan tres intervalos:

$$(-\infty, -2) \quad (-2, 5) \quad (5, \infty)$$

Para determinar el signo de $f(x)$ en $(-\infty, -2)$, se selecciona un punto en ese intervalo, digamos -3 . El signo de $f(x)$ en todo $(-\infty, -2)$ es el mismo que el de $f(-3)$. Debido a que

$$f(x) = (x + 2)(x - 5) \quad [\text{forma factorizada de } f(x)]$$

se tiene

$$f(-3) = (-3 + 2)(-3 - 5)$$

y, por lo tanto,

$$\text{signo}(f(-3)) = \text{signo}(-3 + 2)(-3 - 5) = \text{signo}(-3 + 2)\text{signo}(-3 - 5) = (-)(-) = +$$

Se encontró el signo de $f(-3)$ al usar los signos de los factores de $f(x)$ evaluados en -3 . Así, $f(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$. Para probar los otros dos intervalos, se seleccionan los puntos 0 y 6 . Se encuentra que

$$\text{signo}(f(0)) = \text{signo}(0 + 2)\text{signo}(0 - 5) = (+)(-) = -$$

de modo que $f(x) < 0$ en $(-2, 5)$ y

$$\text{signo}(f(6)) = \text{signo}(6 + 2)(6 - 5) = (+)(+) = +$$

así que $f(x) > 0$ en $(5, \infty)$. En el diagrama de signos de la figura 8.41 se encuentra un resumen de estos resultados. Por lo tanto, $x^2 - 3x - 10 > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1 ●●

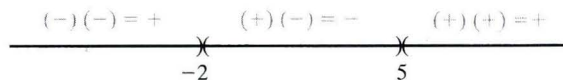


FIGURA 8.41 Diagrama de signos para $(x + 2)(x - 5)$.



FIGURA 8.40 Raíces de $x^2 - 3x - 10$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

RESOLUCIÓN DE UNA DESIGUALDAD POLINOMIAL

Para formar una caja abierta se corta una pieza cuadrada de cada esquina de una pieza de metal de 8 por 10 pulgadas. Si cada lado de los cuadrados que se han cortado es de x pulgadas de largo, el volumen de la caja está dado por $V(x) = x(8 - 2x)(10 - 2x)$. Este problema sólo tiene sentido cuando el volumen es positivo. Determine los valores de x para los que el volumen es positivo.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$.

Solución: Si $f(x) = x(x - 1)(x + 4)$, entonces f es una función polinomial y es continua en todas partes. Las raíces de f son 0, 1 y -4 , que pueden verse en la figura 8.42. Estas raíces determinan cuatro intervalos:

$$(-\infty, -4) \quad (-4, 0) \quad (0, 1) \quad (1, \infty)$$

Ahora, en un punto de prueba en cada intervalo se determina el signo de $f(x)$:

$$\text{signo}(f(-5)) = (-)(-)(-) = - \quad \text{así que } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -4)$$

$$\text{signo}(f(-2)) = (-)(-)(+) = + \quad \text{así que } f(x) > 0 \text{ en } (-4, 0)$$

$$\text{signo}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = (+)(-)(+) = - \quad \text{así que } f(x) < 0 \text{ en } (0, 1)$$

$$\text{signo}(f(2)) = (+)(+)(+) = + \quad \text{así que } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty)$$

En la figura 8.43 se muestra un diagrama de signos para $f(x)$. Por lo tanto, $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$ en $(-\infty, -4]$ y en $[0, 1]$. Observe que $-4, 0$ y 1 están incluidos en la solución porque satisfacen la igualdad ($=$) que es parte de la desigualdad (\leq).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



FIGURA 8.42 Raíces de $x(x - 1)(x + 4)$.

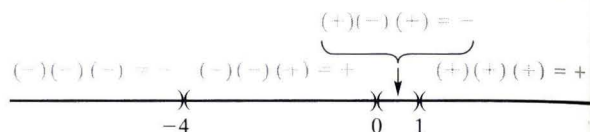


FIGURA 8.43 Diagrama de signos para $x(x - 1)(x + 4)$.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad con función racional

Resuelva $\frac{x^2 - 6x + 5}{x} \geq 0$.



FIGURA 8.44 Raíces y puntos de discontinuidad para $\frac{(x - 1)(x - 5)}{x}$.

Solución: Sea $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x} = \frac{(x - 1)(x - 5)}{x}$. Para una función racional f , se resuelve la desigualdad al considerar los intervalos determinados por las raíces de f y los puntos donde f es discontinua, puntos alrededor de los cuales el signo de $f(x)$ puede cambiar. Aquí las raíces son 1 y 5. La función es discontinua en 0 y continua en los demás puntos. En la figura 8.44 se ha colocado un círculo vacío en 0 para indicar que f no está definida allí. Entonces, considere los intervalos

$$(-\infty, 0) \quad (0, 1) \quad (1, 5) \quad (5, \infty)$$

Al determinar el signo de $f(x)$ en un punto de prueba en cada intervalo, se encuentra que:

$$\text{signo}(f(-1)) = \frac{(-)(-)}{(-)} = - \quad \text{así que } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 0)$$

$$\text{signo}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{(-)(-)}{(+)} = + \quad \text{así que } f(x) > 0 \text{ en } (0, 1)$$

$$\text{signo}(f(2)) = \frac{(+)(-)}{(+)} = - \quad \text{así que } f(x) < 0 \text{ en } (1, 5)$$

$$\text{signo}(f(6)) = \frac{(+)(+)}{(+)} = + \quad \text{así que } f(x) > 0 \text{ en } (5, \infty)$$

En la figura 8.45 se muestra el diagrama de signos. Por lo tanto, $f(x) \geq 0$ en $(0, 1]$ y en $[5, \infty)$. (¿Por qué se incluyen 1 y 5, pero 0 se excluye?) En la figura 8.46 se muestra la gráfica de f . Observe que la solución de $f(x) \geq 0$ consiste en todos los valores de x para los cuales la gráfica está en o por encima del eje x .

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

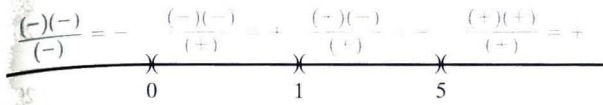


FIGURA 8.45 Diagrama de signos para $\frac{(x-1)(x-5)}{x}$.

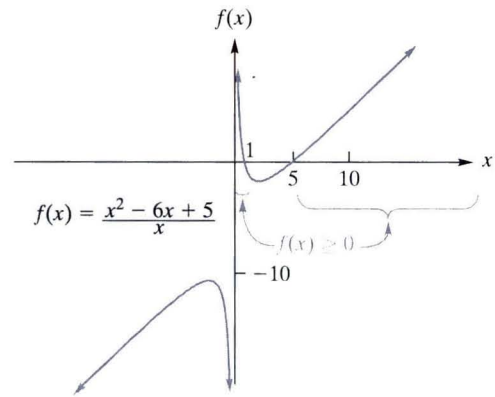


FIGURA 8.46 Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x}$.

● EJEMPLO 4 Solución de desigualdades no lineales

a. Resuelva $x^2 + 1 > 0$.

Solución: La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales. Por lo tanto, $f(x) = x^2 + 1$ no tiene una raíz real. También, f es continua. Entonces, $f(x)$ siempre es positiva o siempre es negativa. Pero x^2 siempre es positiva o cero, de modo que $x^2 + 1$ siempre es positiva. Por lo tanto, la solución de $x^2 + 1 > 0$ es $(-\infty, \infty)$.

b. Resuelva $x^2 + 1 < 0$.

Solución: Del inciso (a), $x^2 + 1$ siempre es positiva, de modo que $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

Problemas 8.4

En los problemas 1 a 26 resuelva las desigualdades por medio de la técnica estudiada en esta sección.

- *1. $x^2 - 3x - 4 > 0$
- 3. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$
- 5. $2x^2 + 11x + 14 < 0$
- *7. $x^2 + 4 < 0$
- 9. $(x+2)(x-3)(x+6) \leq 0$
- *11. $-x(x-5)(x+4) > 0$
- 13. $x^3 + 4x \geq 0$
- 15. $x^3 + 8x^2 + 15x \leq 0$
- *17. $\frac{x}{x^2 - 9} < 0$
- 19. $\frac{4}{x-1} \geq 0$
- 21. $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5} \geq 0$
- 23. $\frac{3}{x^2 + 6x + 5} \leq 0$
- 25. $x^2 + 2x \geq 2$
- 2. $x^2 - 8x + 15 > 0$
- 4. $14 - 5x - x^2 \leq 0$
- 6. $x^2 - 4 < 0$
- 8. $2x^2 - x - 2 \leq 0$
- 10. $(x+5)(x+2)(x-7) \leq 0$
- 12. $(x+2)^2 > 0$
- 14. $(x+2)^2(x^2 - 1) < 0$
- 16. $x^3 + 6x^2 + 9x < 0$
- 18. $\frac{x^2 - 1}{x} < 0$
- 20. $\frac{3}{x^2 - 5x + 6} > 0$
- 22. $\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$
- 24. $\frac{2x + 1}{x^2} \leq 0$
- 26. $x^4 - 16 \geq 0$

27. **Ingresos** Suponga que los consumidores compran q unidades de un producto cuando el precio de cada uno es de $28 - 0.2q$ dólares. ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso sea al menos de \$750?

28. **Administración forestal** Una compañía maderera posee un bosque de forma rectangular, de 1×2 millas. La compañía quiere cortar una franja uniforme con árboles a lo largo de los lados externos del bosque. ¿Qué tan ancha debe ser la franja si se quiere conservar al menos $1\frac{5}{16}$ mi² de bosque?

29. **Diseño de contenedor** Un fabricante de contenedores desea hacer una caja sin tapa, para lo cual corta un cuadrado de

cuatro pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio y dobla después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 pulg³. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda utilizarse.

30. **Participación en talleres** Imperial Education Services (IES) ofrece un curso de procesamiento de datos al personal clave de la compañía Zeta. El precio por persona es de \$50 y la compañía Zeta garantiza que al menos habrá 50 asistentes. Suponga que el IES ofrece reducir el costo para todos en \$0.50 por cada persona que asista después de las primeras 50. ¿Cuál es el límite del tamaño del grupo que el IES aceptará, de modo que el ingreso total nunca sea menor que lo recibido por 50 personas?

31. Grafique $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

32. Grafique $f(x) = \frac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x} > 0$$

Una manera novedosa de resolver una desigualdad no lineal como $f(x) > 0$ es por inspección de la gráfica de $g(x) = f(x)/|f(x)|$, cuyo rango consiste sólo en 1 y -1:

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) > 0 \\ -1 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

La solución de $f(x) > 0$ consiste en todos los intervalos para los cuales $g(x) = 1$. Resuelva las desigualdades de los problemas 33 y 34 con esta técnica.

33. $6x^2 - x - 2 > 0$

34. $\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} < 0$

8.5 Repaso

Términos y símbolos importantes

Sección 8.1	Límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
Sección 8.2	Límites (continuación) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$
Sección 8.3	Continuidad continua en a discontinua en a continua sobre un intervalo continua sobre su dominio
Sección 8.4	Continuidad aplicada a desigualdades diagrama de signos

Ejemplos

Ej. 8, p. 285

Ej. 1, p. 289

Ej. 3, p. 291

Ej. 3, p. 298

Ej. 4, p. 299

Ej. 1, p. 303

Resumen

La noción de límite es el fundamento del cálculo. Decir que el $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, significa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse mucho al número L cuando se selecciona x lo suficientemente cerca pero diferente de a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, y c es una constante, entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
2. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$,
7. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
8. Si f es una función polinomial, entonces
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La propiedad 8 significa que el límite de una función polinomial cuando $x \rightarrow a$, puede encontrarse con sólo evaluar el polinomio en a . Sin embargo, con otras funciones f , la evaluación en a puede conducir a la forma indeterminada $0/0$. En tales casos, operaciones algebraicas como factorización y cancelación pueden producir una función g que concuerde con f , para $x \neq a$, y para la cual el límite pueda determinarse.

Si $f(x)$ se aproxima a L conforme x tiende a a por la derecha, entonces se escribe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$. Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a a por la izquierda, entonces se escribe $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$. Estos límites se llaman límites unilaterales.

El símbolo de infinito ∞ , que no representa un número, se utiliza para describir límites. El enunciado

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

significa que cuando x crece indefinidamente, los valores de $f(x)$ se aproximan al número L . Una proposición similar se aplica cuando $x \rightarrow -\infty$, lo cual significa que x disminuye indefinidamente. En general, si $p > 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

Si $f(x)$ aumenta indefinidamente cuando $x \rightarrow a$, entonces se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. De manera similar, si $f(x)$ disminuye indefinida-

mente, se tiene $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Decir que el límite de una función es ∞ (o $-\infty$) no significa que el límite exista; es una manera de decir que el límite no existe y decir *por qué* no hay límite.

Existe una regla para evaluar el límite de una función racional (cociente de dos polinomios) cuando $x \rightarrow \infty$ o $-\infty$. Si $f(x)$ es una función racional, y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son términos en el numerador y denominador respectivamente, con las potencias más grandes de x , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

En particular, cuando $x \rightarrow \infty$ o $-\infty$, el límite de un polinomio es el mismo que el límite del término con la potencia más grande de x . Esto significa que para un polinomio no constante, el límite cuando $x \rightarrow \infty$ o $-\infty$, es ∞ , o bien, $-\infty$.

Una función f es continua en a si y sólo si

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

De manera geométrica, esto significa que la gráfica de f no presenta pausa cuando $x = a$. Si una función no es continua en a , entonces se dice que la función es discontinua en a . Las funciones polinomiales y las funciones racionales son continuas sobre sus dominios. Por lo tanto, las funciones polinomiales no tienen discontinuidades y las funciones racionales son discontinuas sólo en los puntos donde su denominador es cero.

Para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$), primero se encuentran las raíces reales de f y los valores de x para los cuales f es discontinua. Estos valores determinan intervalos, y en cada intervalo $f(x)$ siempre es positiva o siempre negativa. Para encontrar el signo en cualquiera de estos intervalos, basta con determinar el signo de $f(x)$ en cualquier punto del intervalo. Después que los signos se determinan para todos los intervalos, es fácil dar la solución de $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$).

Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

En los problemas 1 a 28, encuentre los límites, si existen. Si el límite no existe, establézcalo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 6x - 1)$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$
5. $\lim_{h \rightarrow 0} (x + h)$
7. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 2x - 8}$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + 1}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 5}{7x - 4}$
13. $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{2t - 3}{t - 3}$
15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{1 - x}$
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{(3x + 2)^2}$
19. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x}$
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100} + (1/x^3)}{\pi - x^{97}}$
25. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$
26. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$
27. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4 - x}$ (Una pista: Para $x > 4$, $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x - 4}\sqrt{x + 4}$.)
28. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 3x - 10}{\sqrt{x - 5}}$ (Una pista: Para $x > 5$, $\frac{x - 5}{\sqrt{x - 5}} = \sqrt{x - 5}$.)
29. Si $f(x) = 8x - 2$, encuentre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.
30. Si $f(x) = 2x^2 - 3$, encuentre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.
31. **Relación huésped-parásito** Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x , entonces el número de parásitos a lo largo de un periodo es

$$y = 23 \left(1 - \frac{1}{1 + 2x} \right)$$

Si la densidad de huésped aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y ?
32. **Relación presa-depredador** Para una relación particular de presa-depredador, se determinó que el número y de presas

consumidas por un depredador a lo largo de un periodo fue una función de la densidad de presas x (el número de presas por unidad de área). Suponga que

$$y = f(x) = \frac{10x}{1 + 0.1x}$$

Si la densidad de presas aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y ?

33. Mediante la definición de continuidad, demuestre que la función $f(x) = x^2 + 5$ es continua en $x = 7$.
34. Mediante la definición de continuidad, demuestre que la función $f(x) = \frac{x - 5}{x^2 + 2}$ es continua en $x = 5$.
35. Establezca si $f(x) = x^2/5$ es continua en cada número real. Dé una razón para su respuesta.
36. Establezca si $f(x) = x^2 - 2$ es continua en todas partes. Dé una razón para su respuesta.

En los problemas 37 a 44, encuentre los puntos de discontinuidad (si los hay) para cada función.

37. $f(x) = \frac{x^2}{x + 3}$
38. $f(x) = \frac{0}{x^3}$
39. $f(x) = \frac{x - 1}{2x^2 + 3}$
40. $f(x) = (2 - 3x)^3$
41. $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x - 4}$
42. $f(x) = \frac{2x + 6}{x^3 + x}$
43. $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x > -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$
44. $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Resuelva las desigualdades dadas en los problemas 45 a 52.

45. $x^2 + 4x - 12 > 0$
46. $3x^2 - 3x - 6 \leq 0$
47. $x^5 \leq 7x^4$
48. $x^3 + 8x^2 + 15x \geq 0$
49. $\frac{x + 5}{x^2 - 1} < 0$
50. $\frac{x(x + 5)(x + 8)}{3} < 0$
51. $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 8} \geq 0$
52. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 16} \leq 0$

53. Grafique $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 19x + 18}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
54. Grafique $f(x) = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$. De la gráfica, estime $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
55. Grafique $f(x) = x \ln x$. Con base en la gráfica, estime el límite unilateral $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
56. Grafique $f(x) = \frac{e^x - 1}{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x)}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
57. Grafique $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 - x^2 + x - 6 \geq 0$$
58. Grafique $f(x) = \frac{x^5 - 4}{x^3 + 1}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{x^5 - 4}{x^3 + 1} \leq 0$$

Aplicación práctica

Aplicación práctica

Deuda nacional

El tamaño de la deuda nacional de Estados Unidos es de gran interés para muchas personas, y con frecuencia constituye un tema de qué hablar en las noticias. La magnitud de la deuda afecta la confianza en la economía de Estados Unidos tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros, de corporativos oficiales y de líderes políticos. Hay quienes creen que para reducir su deuda el gobierno debería disminuir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno, o bien aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Suponga que es posible reducir la deuda continuamente a una tasa anual fija. Esto es similar al concepto de interés compuesto continuamente, como se estudió antes en el capítulo 5, salvo que en lugar de agregar interés a una cantidad a cada instante, le restaría a la deuda a cada instante. A continuación se estudiará cómo podría modelarse esta situación.

Suponga que la deuda D_0 se reduce a una tasa anual r en el instante $t = 0$. Además, suponga que hay k periodos de igual longitud en un año. Al final del primer periodo, la deuda original se reduce en $D_0 \left(\frac{r}{k}\right)$, de modo que la deuda nueva es

$$D_0 - D_0 \left(\frac{r}{k}\right) = D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)$$

Al final del segundo periodo, esta deuda se reduce en

$D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right) \frac{r}{k}$, de modo que la deuda nueva es

$$\begin{aligned} D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right) - D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right) \frac{r}{k} \\ = D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right) \left(1 - \frac{r}{k}\right) \\ = D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^2 \end{aligned}$$

El patrón continúa. Al final del tercer periodo la deuda es $D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^3$, y así sucesivamente. Al término de t años, el número de periodos es kt y la deuda es $D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$. Si la deuda se redujera a cada instante, entonces $k \rightarrow \infty$. Así, se desea encontrar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_0 \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$$



que puede reescribirse como

$$D_0 \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{-k/r} \right]^{-rt}$$

Si se establece que $x = -r/k$, entonces la condición $k \rightarrow \infty$ implica que $x \rightarrow 0$. De aquí que el límite dentro de los corchetes tenga la forma $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$, que es la e que se estudió en la sección 8.1. Por lo tanto, la deuda D_0 en el instante

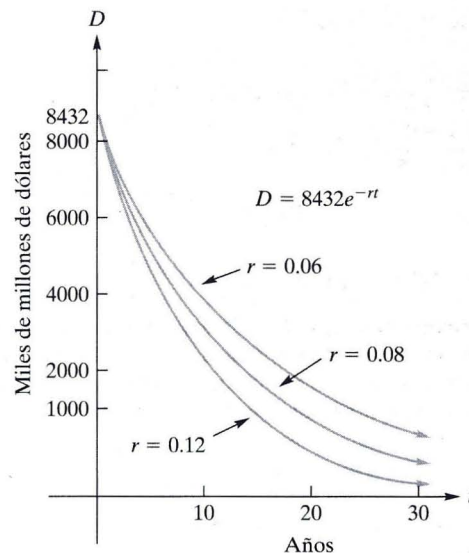


FIGURA 8.47 La deuda del presupuesto se reduce de manera continua.



$t = 0$ se reduce continuamente a una tasa anual r , y t años después la deuda está dada por

$$D = D_0 e^{-rt}$$

Por ejemplo, suponga una deuda para Estados Unidos de \$8432 miles de millones (redondeado al millar de millones más cercano) en julio de 2006 y una tasa de reducción continua de 6% anual. Entonces la deuda dentro de t años contados a partir de ahora, está dada por

$$D = 8432e^{-0.06t}$$

donde D está en miles de millones de dólares. Esto significa que dentro de 10 años, la deuda será $8432e^{-0.06} \approx \$4628$

miles de millones. En la figura 8.47 se muestra la gráfica de $D = 8432e^{-rt}$ para varias tasas r . Entre mayor sea el valor de r , más rápida es la reducción de la deuda. Observe que para $r = 0.06$, la deuda al final de 30 años aún es considerable (aproximadamente \$1394 miles de millones).

Es importante observar que los elementos radiactivos que decaen, también siguen el modelo de la reducción continua de la deuda $D = D_0 e^{-rt}$.

Para investigar sobre la situación actual de la deuda nacional de Estados Unidos, visite uno de los seguidores de la deuda nacional en Internet. Teclee "national debt clock" en un buscador.

Problemas

En los problemas siguientes, suponga una deuda nacional actual de \$8432 miles de millones.

1. Si la deuda se redujera a \$8000 miles de millones dentro de un año, ¿qué tasa anual de reducción continua de la deuda estaría implicada? Dé su respuesta al porcentaje más cercano.
2. Para una reducción continua de deuda a una tasa anual de 6%, determine el número de años, contados a partir de ahora, para que la deuda se reduzca a la mitad. Dé su respuesta al año más cercano.
3. ¿Qué supuestos fundamentan un modelo de reducción de deuda que utiliza una función exponencial? ¿Cuáles son las limitaciones de este enfoque?