EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS

1

Esta es una escena de la película de 1995 *Die Hard: With a Vengeance* (*Duro de matar*), estelarizada por Bruce Willis como el detective John McClane de Nueva York. En la película, McClane es abrumado por el villano Simon Gruber (Jeremy Irons), quien coloca bombas por toda la ciudad y plantea adivinanzas y acertijos para desactivarlas. En una ocasión, Simon habla por teléfono a McClane y al dueño de una tienda, Zeus Carver (Samuel L. Jackson), y les plantea el siguiente acertijo para resolver en 5 minutos.

> *En la fuente hay dos jarras. ¿Las ven? Una es de 5 galones y la otra de 3 galones. Llenen una de las jarras exactamente con 4 galones de agua, colóquenla en la balanza, y el reloj se detendrá. Deben ser precisos. Una onza más o una onza menos provocarán una detonación.*

McClane y Carver lograron resolver el acertijo y desactivar la bomba. ¿Puede hacerlo usted? La respuesta se encuentra en la página 2.

1.1 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Características de los razonamientos inductivo y deductivo • Riesgos del razonamiento inductivo

Solución al problema de inicio del capítulo Esta es una manera de hacerlo: Con ambas jarras vacías, llene la jarra de tres galones y vierta su contenido en la jarra de 5 galones. Luego llene otra vez la jarra de 3 galones, y vierta el contenido en la jarra de 5 galones hasta que esta se llene. Ahora queda un galón en la jarra de 3 galones: $(3+3)-5=1$. Vacíe la jarra de 5 galones y vierta en ella el galón de agua de la jarra de 3 galones. Finalmente, llene la jarra de tres galones y viértala en la jarra de 5 galones. De esta manera, tendrá $1+3=4$ galones en la jarra de cinco galones.

(*Nota*: Existe otra manera de resolver este problema. Intente descubrir la solución alternativa).

Características de los razonamientos inductivo y deductivo

El desarrollo de las matemáticas se remonta a las culturas egipcia y babilónica (3,000 a. C. – 260 d. C.) ante la necesidad de resolver problemas. Para resolver un problema o efectuar una operación se obtuvo algo semejante a una receta de cocina, y se aplicó una y otra vez para resolver problemas similares.

Al observar que un método específico funcionaba para cierto tipo de problemas, los babilonios y los egipcios concluyeron que el mismo método funcionaría para cualquier problema del mismo tipo. Una conclusión de este tipo se llama *conjetura*. Una **conjetura** es una hipótesis fundamentada en observaciones repetidas de un proceso o patrón determinado. El método de razonamiento que acabamos de describir se conoce como *razonamiento inductivo*.

Razonamiento inductivo

El **razonamiento inductivo** se caracteriza por la obtención de una conclusión general (haciendo una conjetura) a partir de observaciones repetidas en ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o no.

Al someter a prueba una conjetura obtenida por razonamiento inductivo, basta con encontrar un ejemplo que no funcione para probar que la conjetura es falsa. Tal ejemplo se conoce como **contraejemplo**.

El razonamiento inductivo ofrece un método poderoso para obtener conclusiones, pero no existe la seguridad de que la conjetura obtenida siempre sea verdadera. Por esta razón, los matemáticos se muestran renuentes a aceptar una conjetura como una verdad absoluta mientras no se pruebe formalmente usando métodos de *razonamiento deductivo*. El razonamiento deductivo es una característica del desarrollo y enfoque de los matemáticos griegos, como revelan los trabajos de Euclides, Pitágoras, Arquímedes y otros. Durante el periodo clásico griego (600 a. C. – 450 d. C.), se aplicaron conceptos generales a problemas específicos, lo que dio como resultado un desarrollo lógico y estructurado de las matemáticas.

Razonamiento deductivo

El **razonamiento deductivo** se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.

Ahora veremos ejemplos de estos dos tipos de razonamiento. En este capítulo nos referiremos con frecuencia a los **números naturales** o **números cardinales**:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Puntos suspensivos}}}{1, 2, 3, \ldots} \quad \text{Números naturales (cardinales)}$$

Los tres puntos (*suspensivos*) indican que los números continúan indefinidamente en el patrón establecido. La regla más probable para continuar este patrón es "sumar 1 al número anterior"; desde luego, esta es la regla que seguimos.

Ahora considere la siguiente lista de números naturales:

$$2, 9, 16, 23, 30.$$

¿Cuál es el número que sigue en esta lista? ¿Cuál es el patrón? Después de analizar los números, vemos que $2+7=9$, y $9+7=16$. ¿Sumamos 16 y 7 para obtener 23? ¿Sumamos

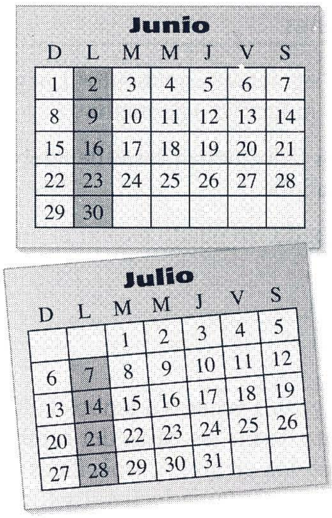


Figura 1

23 y 7 para obtener 30? Sí. Parece que cualquier número en la lista se obtiene sumando 7 al número precedente, de modo que el siguiente número de la lista sería $30 + 7 = 37$.

Para encontrar el "siguiente número" realizamos un razonamiento a partir de la observación de los números de la lista. Pudimos haber pasado de estas observaciones al enunciado general de que cualquier número en la lista es 7 más el número precedente. Este es un ejemplo de *razonamiento inductivo.*

Usando razonamiento inductivo concluimos que 37 era el número siguiente. Suponga que la persona que está haciendo la lista tiene otra respuesta en mente. La lista de números

$$2, 9, 16, 23, 30$$

en realidad representa las fechas de los lunes de junio si el 1 de junio cae en domingo. El siguiente lunes después del 30 de junio es el 7 de julio. Con este patrón, la lista continúa como

$$2, 9, 16, 23, 30, 7, 14, 21, 28, \ldots$$

Vea el calendario de la **figura 1**. La respuesta correcta sería entonces 7. El proceso usado para obtener la regla "sumar 7" en la lista anterior revela una falla importante del razonamiento inductivo. ***Nunca podemos estar seguros de que la verdad en un caso específico será verdad en lo general. El razonamiento inductivo no garantiza un resultado verdadero, pero ofrece los medios para hacer una conjetura***.

Revisaremos ahora la notación básica. A lo largo del libro, usaremos *exponentes* para representar la multiplicación repetida.

$$\text{Base} \rightarrow 4^{3} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \quad \text{El 4 se usa como factor tres veces.}$$

$\uparrow$ Exponente

Expresión exponencial

Si a es un número y n es un número natural $(1, 2, 3, \ldots)$, entonces la expresión exponencial a^n se define como sigue.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}$$

El número a es la **base** y el número n es el **exponente**.

En el razonamiento deductivo usamos enunciados generales y los aplicamos a situaciones específicas. Por ejemplo, considere el **teorema de Pitágoras**:

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos (los lados más cortos) es igual al cuadrado de la hipotenusa (el lado más largo).

De modo que, si sabemos que las longitudes de los lados más cortos son de 3 y 4 pulgadas, podemos calcular la longitud del lado más largo, representada por h.

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= h^2 && \text{Teorema de Pitágoras} \\ 9 + 16 &= h^2 && 3^2 = 3 \cdot 3 = 9;\ 4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \\ 25 &= h^2 && \text{Se suma.} \\ 5 &= h && \text{La raíz cuadrada positiva de 25 es 5.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lado más largo mide 5 pulgadas. Usamos la regla general (el teorema de Pitágoras) y la aplicamos a una situación específica.

El razonamiento de un problema normalmente requiere algunas *premisas*. Una **premisa** puede ser un supuesto, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada o una observación. Luego se razona deductiva o inductivamente a partir de las premisas para obtener una **conclusión**. Las premisas y la conclusión integran un **argumento lógico**.

EJEMPLO 1 Identificación de premisas y conclusiones

Identifique cada premisa y la conclusión de cada uno de los siguientes argumentos. Luego indique si cada argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

***a*)** Nuestra casa está hecha de adobe. Mis vecinos a ambos lados tienen casas de adobe. Por lo tanto, todas las casas del rumbo están hechas de adobe.

***b*)** Todos los teclados tienen el símbolo @. Yo tengo un teclado. Yo puedo teclear el símbolo @.

***c*)** Hoy es martes. Mañana será miércoles.

SOLUCIÓN

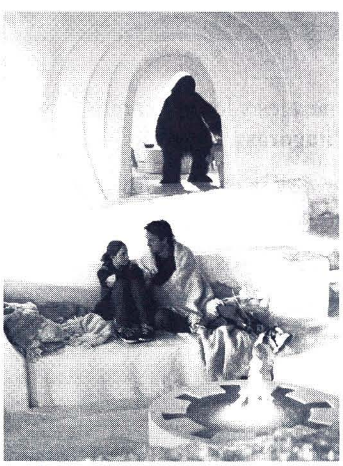
***a*)** Las premisas son "nuestra casa está hecha de adobe" y "mis vecinos a ambos lados tienen casas de adobe". La conclusión es: "por lo tanto, todas las casas del rumbo están hechas de adobe". Como el razonamiento va de los ejemplos específicos al enunciado general, el argumento es un ejemplo de razonamiento inductivo (no obstante, podría tener una conclusión falsa).

***b*)** Aquí, las premisas son "todos los teclados tienen el símbolo @" y "yo tengo un teclado". La conclusión es "yo puedo teclear el símbolo @". Este razonamiento va de lo general a lo específico, de modo que se usa un razonamiento deductivo.

***c*)** Aquí solo hay una premisa: "Hoy es martes". La conclusión es "mañana será miércoles". Se considera el hecho de que el miércoles sigue inmediatamente al martes, aun cuando este hecho no se establece de manera explícita. Como la conclusión surge de hechos generales que se aplican a este caso especial, se usó el razonamiento deductivo. ■■■

El ejemplo anterior del calendario muestra cómo el razonamiento inductivo, en ocasiones, conduce a conclusiones falsas. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el razonamiento inductivo permite obtener resultados correctos si buscamos la respuesta más *probable*.

EJEMPLO 2 Predicción del siguiente número en una secuencia



En la película de 2003 A *Wrinkle in Time*, el joven Charles Wallace, interpretado por David Dorfman, enfrenta el desafío de identificar una secuencia específica de números. Él la identifica correctamente como la **secuencia de Fibonacci**.

Use el razonamiento inductivo para determinar el siguiente número *probable* en cada una de las siguientes listas.

***a*)** 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29 ***b*)** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ***c*)** 2, 4, 8, 16, 32

SOLUCIÓN

***a*)** Cada número de la lista se obtiene sumando 4 al número anterior. El siguiente número probable es $29 + 4 = 33$. (Este es un ejemplo de una *secuencia aritmética*).

***b*)** Iniciando con el tercer número de la lista, el 2, cada número se obtiene sumando los dos números anteriores de la lista. Es decir,

$$1 + 1 = 2, \qquad 1 + 2 = 3, \qquad 2 + 3 = 5,$$

y así sucesivamente. El siguiente número probable en la lista es $13 + 21 = 34$. (Estos son los términos iniciales de la famosa *secuencia de Fibonacci*).

***c*)** Aquí parece que para obtener cada número después del primero, debemos duplicar el número anterior. Por lo tanto, el número siguiente más probable es $32 \times 2 = 64$. (Este es un ejemplo de *secuencia geométrica*). ■■■

El razonamiento inductivo se usa con frecuencia de manera similar para predecir la respuesta en una lista de ejercicios de cálculo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Predicción del producto de dos números

Considere la siguiente lista de ecuaciones. Prediga la multiplicación y el producto que sigue en la lista.

$$37 \times 3 = 111$$
$$37 \times 6 = 222$$
$$37 \times 9 = 333$$
$$37 \times 12 = 444$$

SOLUCIÓN

El lado izquierdo de cada ecuación tiene dos factores, el primero es 37 y el segundo un múltiplo de 3, iniciando con 3. Cada producto (respuesta) está integrado por tres dígitos, todos iguales, iniciando con 111 para 37×3. Por lo tanto, la siguiente multiplicación sería:

$37 \times 15 = 555$ lo cual, por supuesto, es verdadero. ▮▮▮

Tabla 1

Número de puntos	Número de regiones
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16

Riesgos del razonamiento inductivo

Existen riesgos asociados al razonamiento inductivo. Un ejemplo clásico implica el número máximo de regiones que se forman cuando se dibujan cuerdas en un círculo. Una *cuerda* se forma cuando se unen dos puntos de una circunferencia mediante una línea.

Ubique un punto sobre una circunferencia. Como no se ha formado una cuerda, se crea una sola región interior. Véase la **figura 2 a)**. Ubique dos puntos y trace una cuerda. Se forman dos regiones interiores, como se observa en la **figura 2 b)**. Continúe este patrón. Ubique tres puntos y dibuje todas las cuerdas posibles. Se forman cuatro regiones interiores, como se muestra en la **figura 2 c)**. Cuatro puntos producen 8 regiones, y cinco puntos 16 regiones. Véase las **figuras 2 d) y 2 e)**.

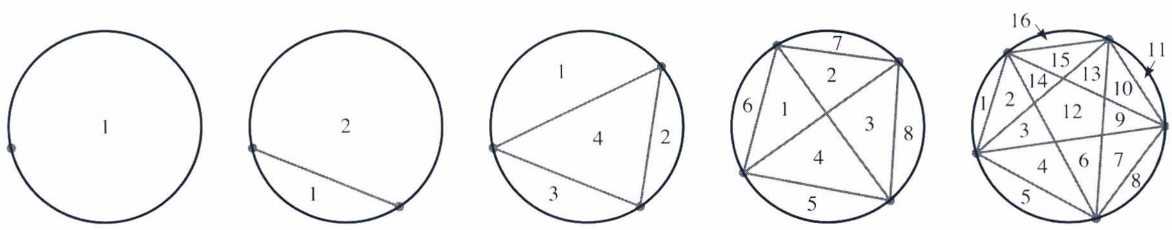


Figura 2

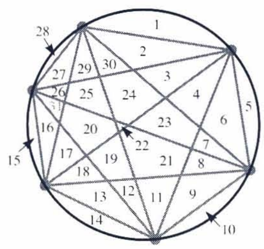


Figura 3

Los resultados de las observaciones anteriores se resumen en la **tabla 1** del margen. El patrón formado en la columna "Número de regiones" es el mismo que observamos en el **ejemplo 2 c)**, donde se predijo que el número siguiente sería 64. Aquí parece que para cada punto adicional sobre la circunferencia, el número de regiones se duplica. Una conjetura inductiva razonable sería que para seis puntos, se formarían 32 regiones. Sin embargo, como indica la **figura 3**, existen *solo 31 regiones*. El patrón de duplicación termina cuando se considera un sexto punto. Al agregar un séptimo punto se producirían 57 regiones. Los números que se obtienen aquí son:

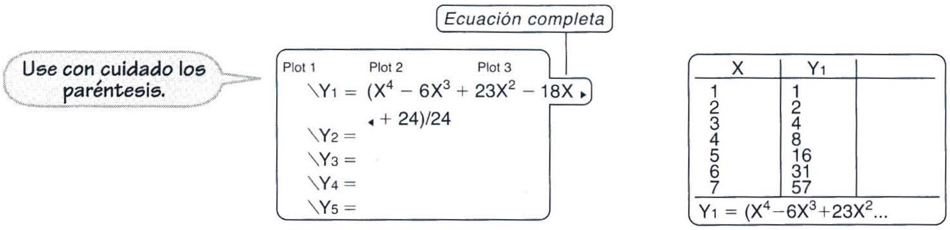
$$1, 2, 4, 8, 16, 31, 57.$$

Para n puntos sobre el círculo, el número de regiones está dado por la fórmula:

$$\frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.^*$$

*Para mayor información sobre este y otros patrones similares, consulte "Counting Pizza Pieces and Other Combinatorial Problems", de Eugene Maier, en *Mathematics Teacher*, enero de 1988, pp. 22-26.

Se puede usar una calculadora graficadora para construir una tabla de valores que indique el número de regiones para diversos números de puntos. Usando X en lugar de n, podemos definir Y_1 mediante la expresión de la página anterior [véase la **figura 4*a*)**]. Luego, creando la tabla de valores, como en la **figura 4*b*)**, se verá cuántas regiones existen (indicadas por Y_1) para el número de puntos propuestos (X).



a) *b)*

Figura 4

Para reflexionar

Anécdota de razonamiento inductivo

La siguiente anécdota acerca del razonamiento inductivo se encuentra en el primer volumen de la serie *In Mathematical Circles*, de Howard Eves.

Un científico tenía dos frascos grandes frente a él sobre la mesa del laboratorio. El frasco de la izquierda contenía 100 pulgas; el frasco de la derecha estaba vacío. El científico sacó con cuidado una pulga del frasco de la izquierda, la colocó sobre la mesa en medio de los dos frascos, dio un paso hacia atrás, y con voz fuerte dijo: "Salta". La pulga saltó y luego la colocó en el frasco de la derecha. El científico sacó cuidadosamente una segunda pulga del frasco de la izquierda y la colocó sobre la mesa entre los dos frascos. De nuevo, dio un paso hacia atrás y con voz fuerte dijo: "Salta". La pulga saltó y fue colocada en el frasco de la derecha. El científico trató del mismo modo a cada una de las 100 pulgas del frasco de la izquierda, y cada pulga saltó como se le ordenó.

Luego, los dos frascos se intercambiaron y el experimento continuó con una pequeña diferencia. Esta vez el científico levantó cuidadosamente una pulga del frasco de la izquierda, le arrancó las patas traseras, colocó la pulga sobre la mesa entre los frascos, dio un paso hacia atrás, y dijo con voz fuerte: "Salta". La pulga no saltó y fue colocada en el frasco de la derecha. El científico sacó una segunda pulga del frasco de la izquierda, le arrancó las patas traseras y luego la colocó sobre la mesa entre los dos frascos. Nuevamente, el científico dio un paso atrás y dijo con voz fuerte: "Salta". La pulga no saltó y fue colocada en el frasco de la derecha. El científico hizo lo mismo con las 100 pulgas del frasco de la izquierda y en ningún caso las pulgas saltaron cuando se les ordenó. El científico apuntó la siguiente inducción:

"Cuando se arrancan las patas traseras a una pulga, se vuelve sorda".

Para investigación individual o en grupo

Comente o investigue ejemplos de publicidad que llevan a los consumidores a obtener conclusiones incorrectas.

1.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 12, determine si el razonamiento es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

1. Si el mecánico dice que tardará siete días en reparar el automóvil de usted, entonces en realidad tardará 10 días. El mecánico dice: "Calculo que tardaré una semana en arreglarlo". Entonces usted espera que esté listo en 10 días a partir de ahora.

2. Si usted toma sus vitaminas se sentirá mucho mejor. Usted toma sus vitaminas. Por lo tanto, se sentirá mucho mejor.

3. Ha llovido todos los días durante los últimos seis días y también está lloviendo ahora. Entonces también lloverá mañana.

4. Los primeros tres hijos de Carrie fueron varones. Si tiene otro bebé será varón.

5. Finley tiene 85 tarjetas coleccionables de béisbol. Su mamá le regaló 20 más en su cumpleaños. Por lo tanto, ahora tiene 105 tarjetas.

6. Si se resta el mismo número de ambos lados de una ecuación verdadera, la nueva ecuación también es verdadera. Yo sé que $9+18=27$. Por lo tanto, $(9+18)-13=27-13$.

7. Si lo construye, ellos vendrán. Usted lo construye. Por lo tanto, ellos vendrán.

8. Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

9. Es un hecho que todos los estudiantes que asistieron a Delgado University fueron aceptados en el posgrado. Como estudio en Delgado, puedo esperar que me acepten en el posgrado.

10. En los últimos 97 años ha florecido una planta exótica en Columbia cada verano, alternando flores amarillas con flores verdes. En el último verano las plantas dieron flores verdes, de modo que en este verano habrá flores amarillas.

11. En la secuencia 5, 10, 15, 20, 25, ..., el siguiente número más probable es 30.

12. Los últimos cuatro discos sencillos de Lady Gaga han llegado a la lista de los 10 mayores éxitos musicales, entonces su disco actual también entrará a la lista.

13. Analice las diferencias entre los razonamientos inductivo y deductivo. Dé un ejemplo de cada uno.

14. Mencione un ejemplo de un razonamiento inductivo incorrecto.

Determine el siguiente término más probable en cada una de las listas de números.

15. 6, 9, 12, 15, 18

16. 13, 18, 23, 28, 33

17. 3, 12, 48, 192, 768

18. 32, 16, 8, 4, 2

19. 3, 6, 9, 15, 24, 39

20. $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}$

21. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$

22. 1, 4, 9, 16, 25

23. 1, 8, 27, 64, 125

24. 2, 6, 12, 20, 30, 42

25. 4, 7, 12, 19, 28, 39

26. $-1, 2, -3, 4, -5, 6$

27. 5, 3, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 5

28. 8, 2, 8, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 2, 8, 2, 2, 2, 2, 2

29. Elabore una lista de números similar a la del **ejercicio 15** de modo que el siguiente número más probable en la lista sea 60.

30. Elabore una lista de números similar a la del **ejercicio 26** de modo que el siguiente número más probable en la lista sea 9.

Use la siguiente lista de ecuaciones y razonamiento inductivo para predecir la siguiente ecuación, y luego verifique su conjetura.

31.
$$\begin{aligned}(9 \times 9) + 7 &= 88\\(98 \times 9) + 6 &= 888\\(987 \times 9) + 5 &= 8888\\(9876 \times 9) + 4 &= 88{,}888\end{aligned}$$

32.
$$\begin{aligned}(1 \times 9) + 2 &= 11\\(12 \times 9) + 3 &= 111\\(123 \times 9) + 4 &= 1111\\(1234 \times 9) + 5 &= 11{,}111\end{aligned}$$

33.
$$\begin{aligned}3367 \times 3 &= 10{,}101\\3367 \times 6 &= 20{,}202\\3367 \times 9 &= 30{,}303\\3367 \times 12 &= 40{,}404\end{aligned}$$

34.
$$\begin{aligned}15873 \times 7 &= 111{,}111\\15873 \times 14 &= 222{,}222\\15873 \times 21 &= 333{,}333\\15873 \times 28 &= 444{,}444\end{aligned}$$

35.
$$\begin{aligned}34 \times 34 &= 1156\\334 \times 334 &= 111{,}556\\3334 \times 3334 &= 11{,}115{,}556\end{aligned}$$

36.
$$\begin{aligned}11 \times 11 &= 121\\111 \times 111 &= 12{,}321\\1111 \times 1111 &= 1{,}234{,}321\end{aligned}$$

37.
$$\begin{aligned}3 &= \frac{3(2)}{2}\\3 + 6 &= \frac{6(3)}{2}\\3 + 6 + 9 &= \frac{9(4)}{2}\\3 + 6 + 9 + 12 &= \frac{12(5)}{2}\end{aligned}$$

38.
$$\begin{aligned}2 &= 4 - 2\\2 + 4 &= 8 - 2\\2 + 4 + 8 &= 16 - 2\\2 + 4 + 8 + 16 &= 32 - 2\end{aligned}$$

39.
$$\begin{aligned}5(6) &= 6(6 - 1)\\5(6) + 5(36) &= 6(36 - 1)\\5(6) + 5(36) + 5(216) &= 6(216 - 1)\\5(6) + 5(36) + 5(216) + 5(1296) &= 6(1296 - 1)\end{aligned}$$

40.

$$3 = \frac{3(3-1)}{2}$$
$$3 + 9 = \frac{3(9-1)}{2}$$
$$3 + 9 + 27 = \frac{3(27-1)}{2}$$
$$3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3(81-1)}{2}$$

41.

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$

42.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Con frecuencia se cuenta la siguiente historia del gran matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Cuando era muy joven, su maestro pidió a sus alumnos que calcularan la suma de los primeros 100 números naturales. Mientras sus compañeros de clase trabajaban arduamente en el problema, Carl simplemente escribió un solo número y entregó el resultado a su maestro. Su respuesta era correcta. Cuando le preguntó cómo lo hizo, el joven Carl le dijo que observó que había 50 pares de números que sumaban 101 (véase el siguiente diagrama). De modo que la suma de todos los números es $50 \times 101 = 5050$.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

101

101

101

50 sumas de 101 = $50 \times 101 = 5050$

Use el método de Gauss para calcular cada suma.

43. $1 + 2 + 3 + \cdots + 200$

44. $1 + 2 + 3 + \cdots + 400$

45. $1 + 2 + 3 + \cdots + 800$

46. $1 + 2 + 3 + \cdots + 2000$

47. Modifique el procedimiento de Gauss para calcular la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 175$.

48. Explique con sus propias palabras cómo se puede modificar el procedimiento de Gauss para calcular la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, donde n es un número natural impar. (Cuando un número natural impar se divide entre 2, se obtiene un residuo igual a 1).

49. Modifique el procedimiento de Gauss para calcular la suma $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$.

50. Use el resultado del **ejercicio 49** para calcular la suma $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$.

51. ¿Cuál es el siguiente número más probable de esta lista?

12, 1, 1, 1, 2, 1, 3

(*Sugerencia:* Piense en los repiques de un reloj).

52. ¿Cuál es el siguiente término de esta lista?

O, T, T, F, F, S, S, E, N, T

(*Sugerencia:* Piense en palabras y su relación con los números).

53. ***a)*** Seleccione un número de tres dígitos, con todos los dígitos diferentes. Ahora invierta los dígitos para obtener otro número, y reste el más pequeño del más grande. Escriba el resultado. Seleccione otro número de tres dígitos y repita el proceso. Haga esto tantas veces hasta que descubra el patrón en los diferentes resultados que obtenga. (*Sugerencia:* ¿Cuál es el dígito de en medio? ¿Cuál es la suma del primer dígito y el último?).

b) Escriba una explicación del patrón.

54. Seleccione un número y siga estos pasos:

a) Multiplique por 2.
b) Sume 6.
c) Divida entre 2.
d) Reste el número con el que inició.
e) Escriba el resultado.

Repita el proceso, solo que ahora, en el **paso *b*)**, sume 8. Escriba el resultado final. Repita el proceso una vez más, pero ahora sume 10 en el **paso *b*)**. Escriba el resultado final.

f) Observe lo que hizo. Luego use razonamiento inductivo para explicar cómo predecir el resultado final.

55. Complete lo siguiente.

142,857 × 1 = _______
142,857 × 2 = _______
142,857 × 3 = _______
142,857 × 4 = _______
142,857 × 5 = _______
142,857 × 6 = _______

¿Qué patrón existe en las respuestas sucesivas? Ahora multiplique 142,857 por 7 para obtener un resultado interesante.

56. Observe las **figuras 2*b*)**, **c)**, ***d*)** y **e)**, y la **figura 3**. En vez de contar las regiones interiores del círculo, cuente las cuerdas formadas. Use razonamiento inductivo para predecir el número de cuerdas que se formarían si se usaran siete puntos.

1.2 UNA APLICACIÓN DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO: PATRONES NUMÉRICOS

Secuencias numéricas • Diferencias sucesivas • Patrones numéricos y fórmulas de sumas • Números figurados

Secuencias numéricas

Una lista de números ordenados como

$$3, 9, 15, 21, 27, \ldots$$

se llama *secuencia*. Una **secuencia numérica** es una lista de números que tiene un primer número, un segundo número, un tercer número, y así sucesivamente, llamados **términos** de la secuencia.

La secuencia que inicia con

$$5, 9, 13, 17, 21, \ldots$$

es una *secuencia aritmética* o *progresión aritmética*. En una **secuencia aritmética**, cada término después del primero se obtiene sumando el mismo número, llamado la **diferencia común**. Para calcular la diferencia común, se elige cualquier número después del primero y se le resta el término anterior. Si elegimos $9 - 5$ (el segundo término menos el primero), por ejemplo, vemos que la diferencia común es 4. Para obtener el término que sigue al 21, le sumamos 4 para obtener $21 + 4 = 25$.

De manera similar, la secuencia que inicia con

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

es una *secuencia geométrica* o *progresión geométrica*. En una **secuencia geométrica**, cada término después del primero se obtiene multiplicando por el mismo número, llamado **razón común**. Para calcular la razón común, se elige un término después del primero y se divide entre el término anterior. Si elegimos $\frac{4}{2}$ (el segundo término dividido entre el primero), por ejemplo, vemos que la razón común es 2. Para calcular el término que sigue al 32, lo multiplicamos por 2 para obtener $32 \cdot 2 = 64$.

EJEMPLO 1 Identificación de secuencias aritméticas y geométricas

En cada secuencia, determine si se trata de una *secuencia aritmética* o de una *secuencia geométrica*. Ya sea aritmética o geométrica, dé el siguiente término de la secuencia.

a) $5, 10, 15, 20, 25, \ldots$ ***b)*** $3, 12, 48, 192, 768, \ldots$ ***c)*** $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

SOLUCIÓN

a) Si seleccionamos *cualquier* término después del primero y le restamos el término anterior, obtenemos la diferencia común de 5.

$$10 - 5 = 5 \qquad 15 - 10 = 5 \qquad 20 - 15 = 5 \qquad 25 - 20 = 5$$

Por lo tanto, esta es una secuencia aritmética. El siguiente término en la secuencia es:

$$25 + 5 = 30.$$

b) Si cualquier término después del primero se multiplica por 4, se obtiene el término siguiente.

$$\frac{12}{3} = 4 \qquad \frac{48}{12} = 4 \qquad \frac{192}{48} = 4 \qquad \frac{768}{192} = 4$$

Por lo tanto, esta es una secuencia geométrica. El siguiente término de la secuencia es:

$$768 \cdot 4 = 3072.$$

c) Mientras que aquí existe un patrón (los términos son los cuadrados de los primeros cinco números naturales), no existe una diferencia común ni una razón común. (Verifíquelo). Esta no es una secuencia aritmética ni una secuencia geométrica. ■■■

Diferencias sucesivas

Algunas secuencias presentan mayor dificultad para hacer una conjetura acerca del término que sigue. Con frecuencia se debe aplicar el **método de diferencias sucesivas** en estos casos. Considere la secuencia

$$2, 6, 22, 56, 114, \ldots$$

Como no es evidente cuál es el término que sigue, se resta el primer término del segundo, el segundo del tercero, el tercero del cuarto, y así sucesivamente.

2 6 22 56 114

6 − 2 = 4 22 − 6 = 16 **56 − 22 = 34** 114 − 56 = 58

Ahora se repite el proceso con la secuencia 4, 16, 34, 58 y se continúa así hasta que la diferencia sea un valor constante, como muestra la línea 4.

2		6		22		56		114		(1)
	4		16		34		58			(2)
		12		18		24				(3)
			6		6					(4)

Esta fila da una secuencia aritmética.

Una vez que se obtiene una línea con valores constantes, simplemente se trabaja "hacia atrás" sumando hasta que se obtiene el número deseado de la secuencia específica. Así, para continuar con este patrón, debería aparecer otro 6 en la línea (4), lo cual significa que el término siguiente en la línea (3) tendría que ser $24 + 6 = 30$. El siguiente término en la línea (2) sería $58 + 30 = 88$. Finalmente, el término que sigue en la secuencia sería $114 + 88 = 202$.

2		6		22		56		114		202		(1)
	4		16		34		58		88			(2)
		12		18		24		30				(3)
			6		6		6					(4)

EJEMPLO 2 Uso de diferencias sucesivas

Determine el número que sigue en cada secuencia.

a) 14, 22, 32, 44, . . . ***b***) 5, 15, 37, 77, 141, . . .

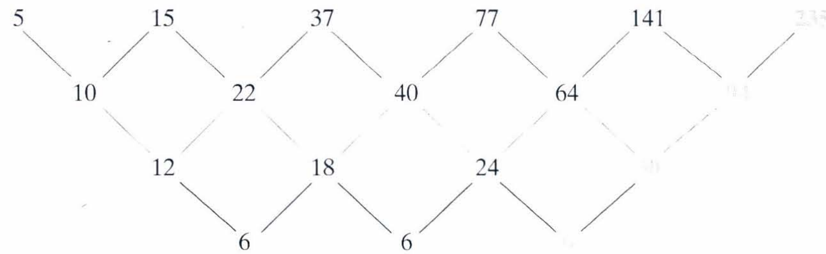
SOLUCIÓN

a) Use el método de diferencias sucesivas para obtener lo siguiente.

14		22		32		44		58
	8		10		12		14	
		2		2		2		

Una vez que se obtiene y extiende la fila de los 2, podemos obtener $12 + 2 = 14$, y $44 + 14 = 58$, como se mostró antes. El número que sigue en la secuencia es 58.

***b*)** Procediendo como antes, se obtiene el siguiente diagrama.



Los números en la "diagonal" del extremo derecho se obtuvieron sumando: $24 + 6 = 30$, $64 + 30 = 94$, y $141 + 94 = 235$. El número que sigue en la secuencia es 235.

El método de las diferencias sucesivas no siempre funciona. Por ejemplo, inténtelo con la secuencia de Fibonacci del **ejemplo 2*b*)** de la **sección 1.1** y vea qué sucede.

Patrones numéricos y fórmulas de sumas

Las matemáticas tienen aparentemente una variedad infinita de patrones numéricos. Observe el siguiente patrón.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 + 3 &= 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 4^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 5^2 \end{aligned}$$

En cada caso, el lado izquierdo de la ecuación es la suma indicada de números naturales impares o nones consecutivos comenzando por el 1, y el lado derecho de la ecuación es el cuadrado del número de términos en el lado izquierdo. El razonamiento inductivo sugeriría que la siguiente línea de este patrón es:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2.$$

Al evaluar cada lado se observa que cada uno es igual a 36.

No podemos concluir que este patrón continuará indefinidamente, porque la observación de un número finito de ejemplos *no* garantiza que el patrón continuará. Sin embargo, usando un método de prueba llamado **inducción matemática**, los matemáticos han probado que este patrón, de hecho, continúa indefinidamente. (Consulte cualquier texto de álgebra universitaria).

Cualquier número natural par se puede escribir como $2k$, donde k es un número natural. De aquí se deduce que el *k-ésimo* número natural impar se escribe como $2k - 1$. Por ejemplo, el **tercer** número natural impar, el 5, se puede escribir como

$$2(3) - 1.$$

Con base en estas ideas, podemos escribir el resultado obtenido anteriormente como sigue:

Suma de los primeros *n* números naturales impares

Si n es cualquier número natural, entonces lo siguiente es verdadero.

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2}$$

EJEMPLO 3 Predicción de la ecuación que sigue en una lista

A continuación se presentan varias ecuaciones que ilustran posibles patrones numéricos. Determine cuál sería la siguiente ecuación, y verifique que se trata de un enunciado verdadero.

a)
$$\begin{aligned} 1^2 &= 1^3 \\ (1+2)^2 &= 1^3+2^3 \\ (1+2+3)^2 &= 1^3+2^3+3^3 \\ (1+2+3+4)^2 &= 1^3+2^3+3^3+4^3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 3+5 &= 2^3 \\ 7+9+11 &= 3^3 \\ 13+15+17+19 &= 4^3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1 \cdot 2}{2} \\ 1+2 &= \frac{2 \cdot 3}{2} \\ 1+2+3 &= \frac{3 \cdot 4}{2} \\ 1+2+3+4 &= \frac{4 \cdot 5}{2} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 12{,}345{,}679 \times 9 &= 111{,}111{,}111 \\ 12{,}345{,}679 \times 18 &= 222{,}222{,}222 \\ 12{,}345{,}679 \times 27 &= 333{,}333{,}333 \\ 12{,}345{,}679 \times 36 &= 444{,}444{,}444 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

a) El lado izquierdo de todas las ecuaciones es el cuadrado de la suma de los primeros n números naturales, mientras que el lado derecho es la suma de sus cubos. La siguiente ecuación en el patrón sería:

$$(1+2+3+4+5)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3.$$

Cada lado da como resultado 225, de modo que el patrón es verdadero para esta ecuación.

b) El lado izquierdo de las ecuaciones contiene la suma de números naturales impares, iniciando con el primero (1) en la primera ecuación, el segundo y tercero (3 y 5) en la segunda ecuación, el cuarto, quinto y sexto (7, 9 y 11) en la tercera ecuación, y así sucesivamente. El lado derecho contiene el cubo (tercera potencia) del número de términos del lado izquierdo en cada caso. De acuerdo con este patrón, la siguiente ecuación sería

$$21+23+25+27+29 = 5^3,$$

que se puede verificar haciendo el cálculo.

c) El lado izquierdo de cada ecuación tiene la suma indicada de los primeros n números naturales, y el lado derecho es de la forma:

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Para que el patrón continúe, la siguiente ecuación sería:

$$1+2+3+4+5 = \frac{5 \cdot 6}{2}.$$

Como cada lado es igual a 15, el patrón para esta ecuación es verdadero.

d) En todos los casos, el primer factor de la izquierda es 12,345,679 y el segundo factor es un múltiplo de 9 (es decir, 9, 18, 27, 36). El lado derecho es un número de nueve dígitos iguales (es decir, 1, 2, 3, 4). Para que el patrón continúe, la ecuación siguiente debe ser:

$$12{,}345{,}679 \times 45 = 555{,}555{,}555.$$

Verifique que este sea un enunciado verdadero. ▮▮▮

Los patrones de los **ejemplos 3*a*) y 3*c*)** se pueden escribir como se indica a continuación.

Fórmulas especiales de sumas

Para cualquier número natural n, lo siguiente es verdadero.

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

y
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Se puede dar un argumento deductivo general que indique cómo se obtiene la segunda ecuación.

Hagamos que S represente la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Esta suma también se puede escribir como $S = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$. Se escriben estas dos ecuaciones como sigue.

$$\begin{aligned}
S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\
S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\
\hline
2S &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) && \text{Se suman los lados correspondientes.} \\
2S &= n(n+1) && \text{Existen } n \text{ términos de } n+1. \\
S &= \frac{n(n+1)}{2} && \text{Se dividen ambos lados entre 2.}
\end{aligned}$$

Números figurados

Pitágoras y su hermandad pitagórica estudiaban números relacionados con arreglos geométricos de puntos, como los **números triangulares, números cuadrados** y **números pentagonales**. La **figura 5** ilustra algunos de los primeros números de estos tipos.

Los **números figurados** poseen muchos patrones interesantes. Todos los números cuadrados mayores que 1 son la suma de dos números consecutivos triangulares. (Por ejemplo, $9 = 3 + 6$, y $25 = 10 + 15$).

En la película animada de 1959 de Disney, *Donald in Mathmagic Land* (*Donald en el país de las matemáticas*), el pato Donald viaja hacia atrás en el tiempo para visitar al matemático griego **Pitágoras** (alrededor de 540 a. C.), quien junto con sus amigos formó la hermandad pitagórica. La hermandad dedicaba su tiempo al estudio de las matemáticas y la música.

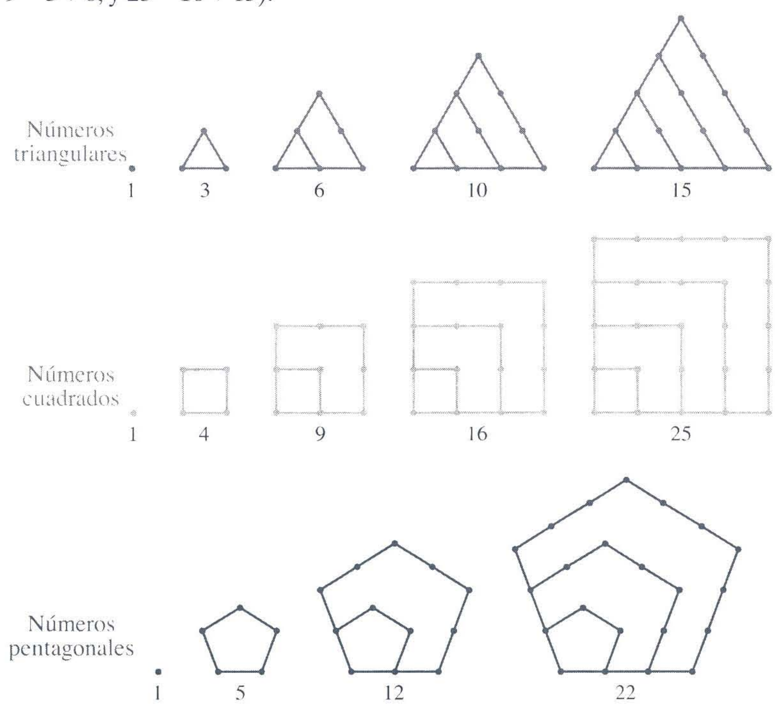


Figura 5

Cada número pentagonal se puede representar como la suma de un número cuadrado y un número triangular. (Por ejemplo, $5 = 4 + 1$ y $12 = 9 + 3$). Existen muchas más relaciones como estas.

En la expresión T_n, n se llama **subíndice**. T_n se lee como **"T subíndice *n*"**, y representa el número triangular en la n-ésima posición de la secuencia. Por ejemplo,

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 3, \quad T_3 = 6, \quad \text{y} \quad T_4 = 10.$$

S_n y P_n representan los n-ésimos números cuadrados y pentagonales, respectivamente.

Fórmulas para números triangulares, cuadrados y pentagonales

Para cualquier número natural n, lo siguiente es verdadero.

El n-ésimo número triangular está dado por $\mathbf{T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

El n-ésimo número cuadrado está dado por $\mathbf{S_n = n^2}$.

El n-ésimo número pentagonal está dado por $\mathbf{P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}}$.

EJEMPLO 4 Uso de las fórmulas de números figurados

Use las fórmulas para calcular lo siguiente.

a) El séptimo número triangular.

b) El duodécimo número cuadrado.

c) El sexto número pentagonal.

SOLUCIÓN

a) $T_7 = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{7(7+1)}{2} = \dfrac{7(8)}{2} = \dfrac{56}{2} = 28$ Fórmula para un número triangular, $n = 7$

b) $S_{12} = n^2 = 12^2 = 144$ Fórmula para un número cuadrado, $n = 12$

$12^2 = 12 \cdot 12$

Dentro de los corchetes primero multiplique y luego reste.

c) $P_6 = \dfrac{n(3n-1)}{2} = \dfrac{6[3(6)-1]}{2} = \dfrac{6(18-1)}{2} = \dfrac{6(17)}{2} = 51$

EJEMPLO 5 Ilustración de la relación entre números figurados

Muestre que el sexto número pentagonal es igual a la suma de 6 más 3 veces el quinto número triangular.

SOLUCIÓN

A partir del **ejemplo 4*c*)**, $P_6 = 51$. El quinto número triangular es 15. Por lo tanto,

$$51 = 6 + 3(15) = 6 + 45 = 51.$$

La relación general que se examina en el **ejemplo 5** se escribe como sigue.

$$P_n = n + 3 \cdot T_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

EJEMPLO 6 Predicción del valor de un número pentagonal

Los primeros 5 números pentagonales son 1, 5, 12, 22, 35. Use el método de diferencias sucesivas para predecir el sexto número pentagonal.

SOLUCIÓN

1		5		12		22		35		**51**
	4		7		10		13		**16**	
		3		3		3		**3**		

Después de obtener la segunda línea de diferencias sucesivas, trabajamos hacia atrás para encontrar que el sexto número pentagonal es 51, lo que coincide con el valor encontrado en el **ejemplo 4*c*)**.

Para reflexionar

Constantes de Kaprekar

Seleccione un número de tres dígitos diferentes. Clasifique los dígitos en orden decreciente para obtener otro número, y luego clasifíquelos en orden ascendente. Ahora réstelos. Repita el proceso con el resultado, usando un 0 en el caso de que la diferencia tenga solo dos dígitos. Por ejemplo, suponga que seleccionamos un número cuyos dígitos son 1, 4 y 8, de modo que en primera instancia obtenemos 841.

$$\begin{array}{r} 841 \\ -148 \\ \hline 693 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 963 \\ -369 \\ \hline 594 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array}$$

Observe que obtuvimos el número 495, y la repetición del proceso nos dará nuevamente 495.

El número 495 se conoce como **constante de Kaprekar**. Siempre se obtendrá el número 495 si el proceso se aplica a este número de tres dígitos.

Para investigación individual o en grupo

1. Aplique el proceso de Kaprekar a un número con dos dígitos diferentes. (Interprete 9 como 09 si es necesario). Compare los resultados. ¿Qué parece ser verdad?
2. Repita el proceso para cuatro dígitos, comparando los resultados después de varios pasos. ¿Qué conjetura se puede hacer respecto de esta situación?

1.2 EJERCICIOS

En cada secuencia determine si se trata de una secuencia aritmética, *una secuencia* geométrica, *o* ninguna de las dos. *Si es aritmética o geométrica, indique cuál es el siguiente término de la secuencia.*

1. 6, 16, 26, 36, 46, . . .

2. 8, 16, 24, 32, 40, . . .

3. 5, 15, 45, 135, 405, . . .

4. 2, 12, 72, 432, 2592, . . .

5. 1, 8, 27, 81, 243, . . .

6. 2, 8, 18, 32, 50, . . .

7. 256, 128, 64, 32, 16, . . .

8. 4096, 1024, 256, 64, 16, . . .

9. 1, 3, 4, 7, 11, . . .

10. 0, 1, 1, 2, 3, . . .

11. 12, 14, 16, 18, 20, . . .

12. 10, 50, 90, 130, 170, . . .

Use el método de diferencias sucesivas para determinar el número que sigue en cada secuencia.

13. 1, 4, 11, 22, 37, 56, . . .

14. 3, 14, 31, 54, 83, 118, . . .

15. 6, 20, 50, 102, 182, 296, . . .

16. 1, 11, 35, 79, 149, 251, . . .

17. 0, 12, 72, 240, 600, 1260, 2352, . . .

18. 2, 57, 220, 575, 1230, 2317, . . .

19. 5, 34, 243, 1022, 3121, 7770, 16799, . . .

20. 3, 19, 165, 771, 2503, 6483, 14409, . . .

21. Observe las **figuras 2 y 3** de la **sección 1.1**. El método de diferencias sucesivas se puede aplicar a la secuencia de regiones interiores

$$1, 2, 4, 8, 16, 31,$$

para calcular el número de regiones determinadas por siete puntos sobre la circunferencia. ¿Cuál es el siguiente término en esta secuencia? ¿Cuántas regiones se determinarían con ochos puntos? Compruebe esto usando la fórmula que se presenta al final de dicha sección.

22. Suponga que la expresión $n^2 + 3n + 1$ determina el n-ésimo término de una secuencia. Es decir, para calcular el primer término, se considera $n = 1$. Para calcular el segundo término, se considera $n = 2$, y así sucesivamente.

a) Calcule los primeros cuatro términos de la secuencia.

b) Use el método de diferencias sucesivas para predecir el quinto término de la secuencia.

c) Calcule el quinto término considerando $n = 5$ en la expresión $n^2 + 3n + 1$. ¿Su resultado concuerda con el que calculó en el **inciso *b*)**?

En los ejercicios 23 a 32 se presentan varias ecuaciones con un presunto patrón numérico. Determine cuál sería la siguiente ecuación y verifique que esta sea un enunciado realmente verdadero.

23. $(1 \times 9) - 1 = 8$
$(21 \times 9) - 1 = 188$
$(321 \times 9) - 1 = 2888$

24. $(1 \times 8) + 1 = 9$
$(12 \times 8) + 2 = 98$
$(123 \times 8) + 3 = 987$

25. $999{,}999 \times 2 = 1{,}999{,}998$
$999{,}999 \times 3 = 2{,}999{,}997$

26. $101 \times 101 = 10{,}201$
$10{,}101 \times 10{,}101 = 102{,}030{,}201$

27. $3^2 - 1^2 = 2^3$
$6^2 - 3^2 = 3^3$
$10^2 - 6^2 = 4^3$
$15^2 - 10^2 = 5^3$

28. $1 = 1^2$
$1 + 2 + 1 = 2^2$
$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$

29. $2^2 - 1^2 = 2 + 1$
$3^2 - 2^2 = 3 + 2$
$4^2 - 3^2 = 4 + 3$

30. $1^2 + 1 = 2^2 - 2$
$2^2 + 2 = 3^2 - 3$
$3^2 + 3 = 4^2 - 4$

31. $1 = 1 \times 1$
$1 + 5 = 2 \times 3$
$1 + 5 + 9 = 3 \times 5$

32. $1 + 2 = 3$
$4 + 5 + 6 = 7 + 8$
$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$

Use la fórmula $S = \frac{n(n+1)}{2}$ *para calcular cada suma.*

33. $1 + 2 + 3 + \cdots + 300$

34. $1 + 2 + 3 + \cdots + 500$

35. $1 + 2 + 3 + \cdots + 675$

36. $1 + 2 + 3 + \cdots + 825$

Use la fórmula $S = n^2$ *para calcular cada suma. (Sugerencia: Para calcular n, sume 1 al último término y divida entre 2).*

37. $1 + 3 + 5 + \cdots + 101$

38. $1 + 3 + 5 + \cdots + 49$

39. $1 + 3 + 5 + \cdots + 999$

40. $1 + 3 + 5 + \cdots + 301$

41. Use la fórmula para encontrar la suma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

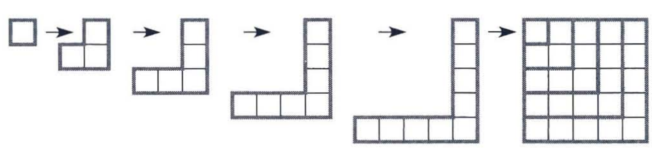
para obtener una fórmula que permita calcular la suma

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$$

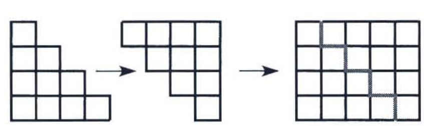
42. Comente con sus palabras la siguiente fórmula analizada en esta sección.

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

43. Explique cómo el siguiente diagrama ilustra geométricamente la fórmula $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$.



44. Explique cómo el siguiente diagrama ilustra geométricamente la fórmula $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$.



45. Use patrones para completar la tabla que se presenta a continuación.

Número figurado	**1o.**	**2o.**	**3o.**	**4o.**	**5o.**	**6o.**	**7o.**	**8o.**
Triangular	1	3	6	10	15	21		
Cuadrado	1	4	9	16	25			
Pentagonal	1	5	12	22				
Hexagonal	1	6	15					
Heptagonal	1	7						
Octagonal	1							

46. Los cinco primeros números triangulares, cuadrados y pentagonales se pueden obtener sumando los términos de las secuencias, como se muestra a continuación.

Triangular	**Cuadrado**	**Pentagonal**
$1 = 1$	$1 = 1$	$1 = 1$
$3 = 1 + 2$	$4 = 1 + 3$	$5 = 1 + 4$
$6 = 1 + 2 + 3$	$9 = 1 + 3 + 5$	$12 = 1 + 4 + 7$
$10 = 1 + 2 + 3 + 4$	$16 = 1 + 3 + 5 + 7$	$22 = 1 + 4 + 7 + 10$
$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$	$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$35 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

Observe las diferencias sucesivas de los términos sumados en los lados derechos de las ecuaciones. El siguiente tipo de números figurados es el **hexagonal**. (Un hexágono tiene seis lados). Use los patrones anteriores para predecir los primeros cinco números hexagonales.

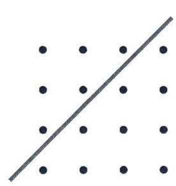
47. Ocho veces un número triangular cualquiera, más 1, es un número cuadrado. Muestre que esto es verdadero con los primeros cuatro números triangulares.

48. Divida el primer número triangular entre 3 y escriba el residuo. Divida el segundo número triangular entre 3 y escriba el residuo. Repita este procedimiento varias veces. ¿Nota algún patrón?

49. Repita el **ejercicio 48**, pero en lugar de usar números triangulares, utilice números cuadrados y divida entre 4. ¿Qué patrón se manifiesta?

50. Los **ejercicios 48 y 49** son casos específicos de lo siguiente. Cuando los números de una secuencia n-agonal se dividen entre n, la secuencia de residuos que se obtiene es una secuencia repetitiva. Verifique esto para $n = 5$ y $n = 6$.

51. Todos los números cuadrados se pueden escribir como la suma de dos números triangulares. Por ejemplo, $16 = 6 + 10$. Esto se representa geométricamente dividiendo un arreglo cuadrado de puntos con una línea como la mostrada.



La configuración triangular arriba de la línea representa un 6, la de abajo de la línea representa un 10, y el arreglo total representa 16. Muestre cómo los números cuadrados 25 y 36 pueden, asimismo, representarse geométricamente como la suma de dos números triangulares.

52. Una fracción está **reducida** si el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1. Por ejemplo, $\frac{3}{8}$ está reducida, pero $\frac{4}{12}$ no.

a) De $n = 2$ a $n = 8$, obtenga las fracciones

$$\frac{n\text{-ésimo número cuadrado}}{(n + 1)\text{-ésimo número cuadrado}}.$$

b) Repita el **inciso *a*)** con números triangulares.

c) Use razonamiento inductivo para hacer una conjetura con base en los resultados de los **incisos *a*)** y ***b*)**, observando si las fracciones se encuentran reducidas.

*Además de las fórmulas para T_n, S_n y P_n, las siguientes fórmulas son ciertas para los números **hexagonales** (H), **heptagonales** (Hp) y **octagonales** (O):*

$$\mathbf{H}_n = \frac{n(4n - 2)}{2}, \quad \mathbf{Hp}_n = \frac{n(5n - 3)}{2}, \quad \mathbf{O}_n = \frac{n(6n - 4)}{2}.$$

Use estas fórmulas para calcular lo siguiente.

53. El decimosexto número cuadrado.

54. El undécimo número triangular.

55. El noveno número pentagonal.

56. El séptimo número hexagonal.

57. El décimo número heptagonal.

58. El duodécimo número octagonal.

59. Observe las fórmulas proporcionadas para H_n, Hp_n y O_n, y use patrones y razonamiento inductivo para predecir la fórmula de N_n, el n-ésimo número **nonagonal**. (Un nonágono tiene nueve lados). Luego considere el hecho de que el sexto número nonagonal es el 111, para ratificar su conjetura.

60. Use el resultado del **ejercicio 59** para obtener el décimo número nonagonal.

Use razonamiento inductivo para contestar cada pregunta.

61. Si se suman dos números triangulares consecutivos, ¿qué clase de número figurado se obtiene?

62. Si se suman los cuadrados de dos números triangulares consecutivos, ¿qué clase de número figurado se obtiene?

63. Eleve al cuadrado un número triangular. Eleve al cuadrado el siguiente número triangular. Reste el resultado más pequeño del resultado más grande. ¿Qué clase de número se obtiene?

64. Seleccione el valor de n mayor o igual que 2. Obtenga T_{n-1}, multiplíquelo por 3, y sume n. ¿Qué clase de número figurado se obtiene?

En una secuencia aritmética, el enésimo término a_n está dado por la fórmula

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

donde a_1 es el primer término y d es la diferencia común. De manera similar, en una secuencia geométrica, el n-ésimo término está dado por

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Aquí, r es la razón común. Use estas fórmulas para determinar el término indicado en cada secuencia.

65. El undécimo término de $2, 6, 10, 14, \ldots$

66. El decimosexto término de $5, 15, 25, 35, \ldots$

67. El vigésimo primer término de $19, 39, 59, 79, \ldots$

68. El trigésimo sexto término de $8, 38, 68, 98, \ldots$

69. El centésimo primer término de $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

70. El centésimo quincuagésimo primer término de $0.75, 1.50, 2.25, 3.00, \ldots$

71. El undécimo término de $2, 4, 8, 16, \ldots$

72. El noveno término de $1, 4, 16, 64, \ldots$

73. El duodécimo término de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

74. El décimo término de $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

75. El octavo término de $40, 10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$

76. El noveno término de $10, 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \ldots$

1.3 ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Método general para la solución de problemas • Uso de una tabla o un diagrama • Trabajar hacia atrás • Uso de ensayo y error • Suposición y verificación • Consideración de un problema similar más sencillo • Elaboración de un boceto • Uso del sentido común

George Polya, autor del clásico *How to solve it*, murió el 7 de septiembre de 1985 a la edad de 97 años. Nació en Budapest, Hungría. Una vez le preguntaron por qué había tantos buenos matemáticos húngaros al final del siglo. Especuló diciendo que era porque las matemáticas eran la ciencia más barata. No requieren un equipo costoso, solo lápiz y papel. Escribió o coescribió más de 250 documentos en muchos idiomas, escribió varios libros, y fue un conferencista y profesor brillante. Sin embargo, algo más interesante: nunca aprendió a conducir un automóvil.

Método general para la solución de problemas

En las primeras dos secciones de este capítulo destacamos la importancia de reconocer un patrón y el uso del razonamiento inductivo en la solución de problemas. Quizás el estudio más conocido de técnicas para la solución de problemas fue el que desarrolló George Polya (1888-1985), entre cuyas numerosas publicaciones se encuentra el clásico moderno *How to solve it*. En ese libro, Polya propuso un método de cuatro pasos para la solución de problemas.

Método de cuatro pasos de Polya para la solución de problemas

Paso 1 **Comprenda el problema.** Usted no puede resolver un problema si no entiende qué le pidieron calcular. Se debe leer y analizar el problema cuidadosamente. Tal vez sea necesario leerlo varias veces. Después de ello, pregúntese: "¿Qué debo calcular?".

Paso 2 **Elabore un plan.** Existen muchas maneras de enfrentar un problema. Elija un plan adecuado para el problema específico que está resolviendo.

Paso 3 **Aplique el plan.** Una vez que sabe cómo enfocar el problema, ponga en práctica ese plan. Tal vez llegue a "un callejón sin salida" y encuentre obstáculos imprevistos, pero debe ser persistente.

Paso 4 **Revise y verifique.** Revise su respuesta para ver que sea razonable. ¿Satisface las condiciones del problema? ¿Se han contestado todas las preguntas que plantea el problema? ¿Es posible resolver el problema de manera diferente y llegar a la misma respuesta?

El paso 2 del método para la solución de problemas de Polya aconseja elaborar un plan. Aquí se presentan algunas sugerencias y estrategias que han demostrado ser útiles.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Elabore una tabla o un diagrama.
Busque un patrón.
Resuelva un problema similar más sencillo.
Elabore un bosquejo.
Use el razonamiento inductivo.
Escriba una ecuación y resuélvala.
Si una fórmula se aplica, úsela.
Trabaje hacia atrás.
Suponga y verifique.
Use ensayo y error.
Use el sentido común.
Busque la "trampa" que se le tiende en el caso de que una respuesta parezca demasiado evidente o imposible.

Fibonacci (1170–1250) descubrió la secuencia que lleva su nombre en un problema de conejos. Fibonacci (hijo de Bonnaccio) es uno de varios nombres de Leonardo de Pisa. Su padre administraba un almacén en la actual Bougie (o Bejaia), en Argelia. Allí, Leonardo Pisano estudió con un maestro árabe y aprendió la numeración concebida en la India, que los árabes y otros musulmanes llevaron a Occidente.

Fibonacci escribió libros de álgebra, geometría y trigonometría.

Uso de una tabla o un diagrama

EJEMPLO 1 Solución del problema de los conejos de Fibonacci

Un hombre colocó una pareja de conejos en una jaula. Durante el primer mes los conejos no se reprodujeron, pero cada mes a partir de entonces tuvieron una nueva pareja de conejos. Si cada nueva pareja se reproducía de la misma manera, ¿cuántas parejas de conejos habría al cabo de un año? [Este problema es famoso en la historia de las matemáticas y apareció por primera vez en *Liber Abaci*, un libro del matemático italiano Leonardo Pisano (también conocido como Fibonacci) en el año 1202].

SOLUCIÓN

Paso 1 **Comprenda el problema.** Podemos formular de otra manera el problema:

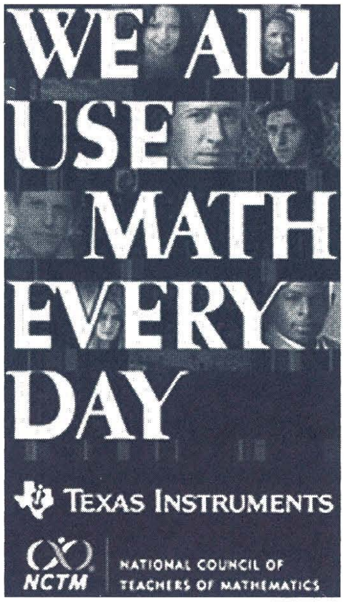
¿Cuántas parejas de conejos tendrá el hombre al final de un año si inicia con una pareja de conejos que se reproducen de esta manera: durante el primer mes de vida, la pareja no procrea, pero cada mes a partir de entonces cada pareja procrea un nuevo par?

Paso 2 **Elabore un plan.** Puesto que existe un patrón definido de cómo se reproducen los conejos, podemos construir la **tabla 2**.

Tabla 2

Mes	Número de parejas al inicio	Número de nuevas parejas procreadas	Número de parejas al final del mes
1o.			
2o.			
3o.			
4o.			
5o.			
6o.			
7o.			
8o.			
9o.			
10o.			
11o.			
12o.			

La respuesta estará aquí.



El 23 de enero de 2005, la cadena de televisión CBS presentó el primer episodio de *NUMB3RS*, un programa enfocado en cómo se usan las matemáticas para resolver crímenes. David Krumholtz interpreta a Charlie Eppes, un matemático brillante que ayuda a un agente del FBI que es su hermano (Rob Morrow).

En el episodio "Sabotage" de la primera temporada (25/02/2005), uno de los agentes admite que "jamás vio cómo se relacionan las matemáticas con el mundo real", y Charlie usa la **secuencia de Fibonacci** y su relación con la naturaleza para demostrarle que estaba en un error.

La secuencia mostrada en la tabla del **ejemplo 1** es la secuencia de Fibonacci, mencionada en el **ejemplo 2 *b*)** de la **sección 1.1.**

Paso 3 **Aplique el plan.** Al inicio del primer mes, solo hay una pareja de conejos. No se reproducen durante el primer mes, de modo que hay $1+0=1$ pareja al final del primer mes. Este patrón continúa. En la tabla sumamos el número de la primera columna de números al número de la segunda columna para obtener el número de la tercera.

Mes	Número de parejas al inicio	+	Número de nuevas parejas procreadas	=	Número de parejas al final del mes	
1o.	1		0		1	$1+0=1$
2o.	1		1		2	$1+1=2$
3o.	2		1		3	$2+1=3$
4o.	3		2		5	•
5o.	5		3		8	•
6o.	8		5		13	•
7o.	13		8		21	•
8o.	21		13		34	•
9o.	34		21		55	•
10o.	55		34		89	•
11o.	89		55		144	•
12o.	144		89		233	$144+89=233$

La respuesta está en la última entrada

Habrá 233 parejas de conejos al final del año.

Paso 4 **Revise y verifique.** Regrese y asegúrese de que interpretó el problema correctamente. Verifique dos veces la aritmética. Se contestó la pregunta que planteaba el problema, de modo que este queda resuelto.

Trabajar hacia atrás

EJEMPLO 2 Cálculo de una apuesta en las carreras

Ronnie Virgets asiste cada semana a las carreras de autos con sus amigos. Una semana, Ronnie triplicó su dinero, pero luego perdió \$12.* Regresó con su dinero la siguiente semana, lo duplicó, y luego perdió \$40. La siguiente semana volvió a llevar su dinero y lo intentó nuevamente. En esta ocasión cuadruplicó su dinero, y luego jugó lo suficientemente bien para llevarse a su casa un total de \$224. ¿Con cuánto inició la primera semana?

SOLUCIÓN

Este problema requiere determinar la cantidad de dinero con que inició Ronnie. Puesto que conocemos la cifra final, se puede aplicar el método de trabajar hacia atrás.

Como la cantidad final es de \$224 y representa cuatro veces la cantidad con la que inició la tercera semana, *dividimos* \$224 entre 4 para saber que inició la tercera semana con \$56. Antes de perder \$40 la segunda semana, tenía los \$56 más los \$40 que perdió, es decir, \$96. Esto representa el doble de la cifra con la que inició, de modo que la segunda semana inició con \$96 *divididos* entre 2, es decir, \$48. Al repetir este proceso una vez más para la primera semana, antes de perder \$12, él tenía

$$\$48+12=\$60,$$

lo cual representa el triple de la cifra con la que inició. Por lo tanto, Ronnie inició con

$$\$60\div 3=\$20. \quad \text{Respuesta}$$

Para verificar, observe las siguientes ecuaciones, las cuales describen las pérdidas y ganancias.

Primera semana: $(3\times \$20)-\$12=\$60-\$12=\$48$
Segunda semana: $(2\times \$48)-\$40=\$96-\$40=\$56$
Tercera semana: $(4\times \$56)=\$224$ La cantidad final

**Nota:* En esta obra el signo \$ representa dólares estadounidenses, a menos que se especifique otra unidad monetaria.

Augustus De Morgan fue un matemático y filósofo inglés, que trabajó como profesor en la Universidad de Londres. Escribió numerosos libros, uno de los cuales fue *A Budget of Paradoxes*. Su trabajo en teoría de conjuntos y lógica permitió descubrir las leyes que llevan su nombre y se presentan en otros capítulos. Murió en el mismo año que Charles Babbage.

Uso de ensayo y error

Recuerde que $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$. Es decir, 5 al cuadrado es 25. Por lo tanto, el 25 es un **cuadrado perfecto**.

1, 4, 9, 16, 25, 36, etcétera, son cuadrados perfectos

EJEMPLO 3 Cálculo de la fecha de nacimiento de Augustus De Morgan

El matemático Augustus De Morgan vivió en el siglo XIX. Él estableció el siguiente enunciado: "En el año x^2, yo tenía x años de edad". ¿En qué año nació De Morgan?

SOLUCIÓN

Debemos obtener el año de nacimiento de De Morgan. El planteamiento del problema nos dice que vivió durante el siglo XIX. Un año de su vida fue un cuadrado perfecto, de modo que debemos encontrar un número entre 1800 y 1900 que sea un cuadrado perfecto. Usando ensayo y error:

$$42^2 = 42 \cdot 42 = 1764$$
$$43^2 = 43 \cdot 43 = \mathbf{1849} \quad \text{1849 está entre 1800 y 1900.}$$
$$44^2 = 44 \cdot 44 = 1936$$

El único número natural cuyo cuadrado está entre 1800 y 1900 es 43, puesto que $43^2 = 1849$. Por lo tanto, De Morgan tenía 43 años en 1849. El paso final en la solución del problema implica restar 43 de 1849 para obtener el año de su nacimiento.

$$1849 - 43 = \mathbf{1806} \quad \text{Nació en 1806.}$$

Aun cuando la siguiente verificación parezca poco ortodoxa, funciona: busque la fecha de nacimiento de De Morgan en un libro de historia de las matemáticas, como *An Introduction to the History of Mathematics*, sexta edición, de Howard W. Eves.

Suposición y verificación

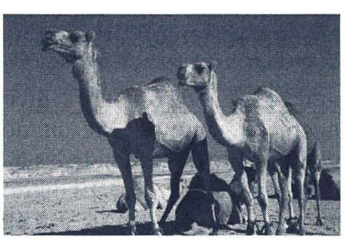
Como se mencionó antes, $5^2 = 25$. La operación inversa (opuesta) de elevar un número al cuadrado se conoce como obtener la **raíz cuadrada**. La raíz cuadrada positiva se identifica con el **símbolo de radical** $\sqrt{}$. De modo que, $\sqrt{25} = 5$. También,

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{16} = 4, \quad \text{y así sucesivamente.} \quad \text{Raíces cuadradas}$$

El siguiente problema implica la raíz cuadrada y nos remite a las matemáticas que se practicaban en India alrededor del año 850.

EJEMPLO 4 Cálculo del número de camellos

Se vio a la cuarta parte de una manada de camellos en el bosque; el doble de la raíz cuadrada de esa manada se fue a las laderas de la montaña; y 3 por 5 camellos permanecieron en la orilla del río. ¿Cuál es el número de camellos en esa manada?



SOLUCIÓN

El número de camellos en una manada debe ser un número natural. Como en el planteamiento del problema se menciona "un cuarto de la manada" y "la raíz cuadrada de esa manada", el número de camellos debe ser tanto un múltiplo de 4 como un cuadrado perfecto, de modo que solo se utilizan números enteros. El número natural más pequeño que satisface ambas condiciones es 4. Se escribe una ecuación donde x representa el número de camellos en la manada, y luego sustituimos x por 4 para ver si es la solución.

$$\overbrace{\frac{1}{4}x}^{\text{Un cuarto de la manada}} + \overbrace{2\sqrt{x}}^{\text{El doble de la raíz cuadrada de la manada}} + \overbrace{3\cdot 5}^{\text{3 veces 5 camellos}} \overbrace{=}^{=} \overbrace{x}^{\text{Número de camellos en la manada}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(4) + 2\sqrt{4} + 3\cdot 5 &= 4 && \text{Sea } x = 4. \\ 1 + 4 + 15 &\stackrel{?}{=} 4 && \sqrt{4} = 2 \\ 20 &\neq 4 \end{aligned}$$

Como 4 no es la solución, se intenta con 16, el siguiente cuadrado perfecto que es múltiplo de cuatro.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(16) + 2\sqrt{16} + 3\cdot 5 &= 16 && \text{Sea } x = 16. \\ 4 + 8 + 15 &\stackrel{?}{=} 16 && \sqrt{16} = 4 \\ 27 &\neq 16 \end{aligned}$$

Como 16 no es la solución, se intenta con 36.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(36) + 2\sqrt{36} + 3\cdot 5 &= 36 && \text{Sea } x = 36. \\ 9 + 12 + 15 &\stackrel{?}{=} 36 && \sqrt{36} = 6 \\ 36 &= 36 \end{aligned}$$

De modo que 36 es el número de camellos en la manada. *Verifique:* "Un cuarto de 36, más el doble de la raíz cuadrada de 36, más 3 por 5" nos da 9 más 12 más 15, lo cual es igual a 36.

Consideración de un problema similar más sencillo

EJEMPLO 5 Cálculo del dígito de las unidades de una potencia

El dígito del extremo derecho en un número natural se llama dígito de las *unidades*, debido a que este indica cuántos unos o cuántas unidades están contenidos en el número cuando se considera la agrupación en decenas. ¿Cuál es el dígito de las unidades (o unos) en 2^{4000}?

SOLUCIÓN

Recuerde que 2^{4000} significa que 2 se usa como factor 4000 veces.

$$2^{4000} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\text{4000 factores}}$$

Para contestar la pregunta, examinamos algunas potencias de 2 más pequeñas y luego buscamos un patrón. Iniciamos con el exponente 1 y examinamos las primeras 12 potencias de 2.

$$\begin{array}{lll} 2^1 = 2 & 2^5 = 32 & 2^9 = 512 \\ 2^2 = 4 & 2^6 = 64 & 2^{10} = 1024 \\ 2^3 = 8 & 2^7 = 128 & 2^{11} = 2048 \\ 2^4 = 16 & 2^8 = 256 & 2^{12} = 4096 \end{array}$$

Observe que en cualquiera de las cuatro filas de arriba, el dígito de las unidades es el mismo a lo largo de la fila. La última fila, que contiene los exponentes 4, 8 y 12, tiene a 6 en el lugar de las unidades. Cada uno de estos exponentes es divisible entre 4, y como 4000 es divisible entre 4, usamos razonamiento inductivo para predecir que el dígito de las unidades en 2^{4000} es 6.

(*Nota:* El dígito de las unidades para cualquier otra potencia se puede calcular si dividimos el exponente entre 4 y consideramos el residuo. Luego comparamos el resultado con la lista de potencias de arriba. Por ejemplo, para obtener el dígito de las unidades de 2^{543}, dividimos 543 entre 4 para obtener un cociente de 135 y un residuo de 3. El dígito de las unidades es lo mismo que 2^3, que es igual a 8).

La película de 1952 titulada *Hans Christian Andersen* fue interpretada por Danny Kaye como el escritor danés de cuentos de hadas. En una escena afuera de la escuela, canta una canción a una oruga medidora. "Oruga medidora, oruga medidora, que mides la caléndula, tú y tu aritmética, probablemente llegarán lejos". En la escena siguiente, se oye cantar a los estudiantes de la escuela sumas aritméticas:

Dos y dos son cuatro,
Cuatro y cuatro son ocho,
Ocho y ocho son dieciséis,
Dieciséis y dieciséis son treinta y dos.

Las respuestas son **potencias de 2**.

Elaboración de un boceto

EJEMPLO 6 Conexión de puntos

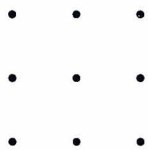


Figura 6

Un arreglo de nueve puntos se acomoda formando un cuadrado de 3×3, como se muestra en la **figura 6**. ¿Es posible unir los puntos con exactamente cuatro líneas rectas si no se permite levantar el lápiz del papel y no se puede volver a pasar el lápiz sobre una línea que ya se haya dibujado? Si es así, muestre cómo.

SOLUCIÓN

La **figura 7** muestra tres intentos. En cada caso, algo está mal. En el primer dibujo, un punto queda sin unir. En el segundo, no es posible dibujar la figura sin levantar el lápiz del papel o sin volver a pasar el lápiz sobre una línea que ya se haya dibujado. En la tercera figura se unieron todos los puntos, pero se utilizaron cinco rectas y se hizo un doble trazo sobre la figura.

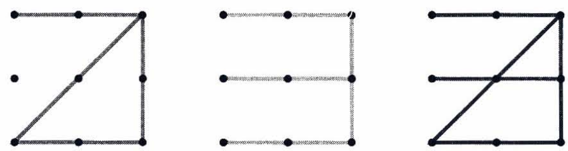


Figura 7

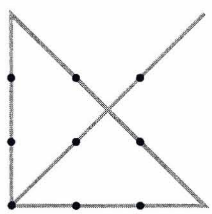


Figura 8

Las condiciones del problema se satisfacen en la **figura 8**. Nos "salimos del cuadro", lo cual no está prohibido por las condiciones del problema. Este es un ejemplo de pensamiento creativo: usamos una estrategia que con frecuencia no se considera en primera instancia.

Uso del sentido común

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Algunos problemas suponen una trampa. Parecen demasiado fáciles o quizás imposibles al principio porque tendemos a pasar por alto una situación evidente. Examine con cuidado el lenguaje en estos problemas. Y, por supuesto, nunca olvide usar el sentido común.

En *Die Hard: With a Vengeance* (véase el **inicio del capítulo**), Simon provoca burlonamente a McClane con un acertijo que tiene su origen en las matemáticas egipcias.

Cuando iba a Saint Ives,
Me encontré a un hombre con siete esposas.
Cada esposa tenía siete sacos,
Cada saco tenía siete gatos,
Cada gato tenía siete gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿Cuántos iban a Saint Ives?

"Mi teléfono es 555 y la respuesta.
Llámame en 30 segundos o morirás".

Al llamar al 555-0001, pudo hablar con Simon. ¿Puede decir por qué el 1 es la respuesta de este acertijo? (Utilice el **sentido común**).

EJEMPLO 7 Obtención de las denominaciones de monedas

Dos monedas actuales de los Estados Unidos tienen un valor total de \$1.05. Una de ellas no es un dólar. ¿Cuáles son estas monedas?

SOLUCIÓN

Nuestra reacción inicial podría ser: "La única manera de tener dos monedas que totalicen \$1.05 es tener una moneda de cinco centavos y un dólar, pero el problema dice que una de ellas no es un dólar". Desde luego, este enunciado es verdadero. De lo que debemos darnos cuenta aquí es que la moneda que no es un dólar es la moneda de cinco centavos, y ¡la *otra* moneda es el dólar! De modo que las dos monedas son un dólar y una de cinco centavos.

1.3 EJERCICIOS

Una de las secciones más populares de la revista Mathematics Teacher, *que edita el* National Council of Teachers of Mathematics, *es el calendario mensual, ya que plantea un problema interesante, inusual o desafiante para cada día del mes. Los problemas son contribuciones de los editores, maestros y estudiantes, y sus nombres se mencionan en cada número. Algunos de los siguientes ejercicios son problemas seleccionados de estos calendarios de años pasados; en cada uno se indica la fecha de publicación del problema. Los autores agradecen a todos los colaboradores por permitir la reproducción de estos problemas.*

Use las diferentes estrategias de solución de problemas para resolver cada ejercicio. En muchos casos existe más de un enfoque, así que sea creativo.

1. ***Alumnos en clase*** En un salón existe el mismo número de varones y niñas. Si se retiran 8 niñas, el número de varones es el doble que el de niñas. ¿Cuál es el número original de estudiantes presentes? (24 de mayo de 2008).

2. ***Dame un dígito*** A partir de un número de dos dígitos, genere un número de tres dígitos colocando un 6 en el dígito del extremo derecho. Luego sume 6 al número de tres dígitos resultante y elimine el dígito del extremo derecho para obtener otro número de dos dígitos. Si el resultado es 76, ¿cuál es el número de dos dígitos original? (18 de octubre de 2009).

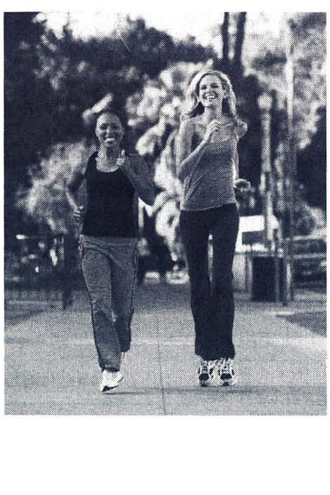
3. ***Dígito faltante*** Busque un patrón y obtenga el dígito x que falta.

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & x & 5 \\ 4 & 3 & 6 & 9 \end{array}$$

(14 de febrero de 2009).

4. ***Abundancia*** Un entero $n > 1$ es **abundante** si la suma de sus divisores propios (divisores enteros positivos más pequeños que n) es mayor que n. Calcule el entero abundante más pequeño. (27 de noviembre de 2009).

5. ***Competencia a campo traviesa*** Las escuelas de una agrupación atlética compiten en un encuentro a campo traviesa para el que cada escuela envía tres participantes. Erin, Katelyn e Iliana son las tres representantes de una escuela. Erin terminó la competencia en la posición media; Katelyn terminó después que Erin, en la decimonovena posición; e Iliana terminó en la vigesimoctava posición. ¿Cuántas escuelas participaron en la carrera? (27 de mayo de 2008).



6. ***Salir a pescar*** Cuatro amigos salieron a pescar un día y trajeron a casa un total de 11 pescados. Si cada uno capturó por lo menos un pez, ¿cuál de los siguientes enunciados *debe* ser verdadero?

   A. Una persona capturó 2 peces.
   B. Una persona capturó 3 peces.
   C. Una persona capturó menos de 3 peces.
   D. Una persona capturó más de 3 peces.
   E. Dos personas capturaron cada una más de 1 pez.

   (24 de mayo de 2008).

7. ***Corte de un cuadrado por la mitad*** ¿De cuántas maneras puede cortarse un cuadrado a la mitad con una línea recta? (2 de octubre de 2008).

8. ***¡Mientes!*** Max, Sam y Brett estaban jugando basquetbol. Uno de ellos rompió una ventana, y los otros dos lo vieron romperla. Max dijo: "Soy inocente". Sam dijo: "Max y yo somos inocentes". Brett dijo: "Max y Sam son inocentes". Si solamente uno de ellos dice la verdad, ¿quién rompió la ventana? (21 de septiembre de 2008).

9. ***Refrigerio para una polilla de biblioteca*** Una enciclopedia de 26 volúmenes (uno por cada letra del abecedario del inglés) se coloca en un estante en orden alfabético de izquierda a derecha. Cada volumen tiene 2 pulgadas de espesor, incluyendo las cubiertas anterior y posterior. Cada cubierta tiene $\frac{1}{4}$ de pulgada de espesor. Una polilla come en línea recta a través de la enciclopedia, iniciando en el interior de la cubierta frontal del volumen A y terminando después de comerse la cubierta posterior del volumen Z. ¿Cuántas pulgadas de libro se comió la polilla? (12 de noviembre de 2008).

10. ***Saque cualquier carta*** Tres cartas de figuras de un mazo normal de naipes permanecen boca abajo en una fila horizontal y están colocadas de tal manera que inmediatamente a la derecha de un rey se encuentra una o dos reinas, inmediatamente a la izquierda de una reina se encuentra una o dos reinas, inmediatamente a la izquierda de un corazón se encuentra una o dos espadas, e inmediatamente a la derecha de una espada se encuentra una o dos espadas. Nombre en orden las tres cartas. (23 de abril de 2008).

11. ***Gatos de Gatúbela*** Si usted pregunta al personaje Gatúbela cuántos gatos tiene, ella contesta con un acertijo: "Cinco sextos de mis gatos más siete". ¿Cuántos gatos tiene Gatúbela? (20 de abril de 2003).

12. ***Colección de lápices*** Bob dio cuatro quintos de sus lápices a Bárbara, luego dio dos tercios de los lápices restantes a Bonnie. Si terminó con 10 lápices para él, ¿cuántos lápices tenía al principio? (12 de octubre de 2003).

13. ***Cargar gasolina*** En el marcador de gasolina de una camioneta se lee inicialmente $\frac{1}{8}$ de tanque. Cuando se agregan 15 galones al tanque, en el marcador se lee $\frac{3}{4}$ de tanque. ¿Cuántos galones más son necesarios para llenar el tanque? (25 de noviembre de 2004).

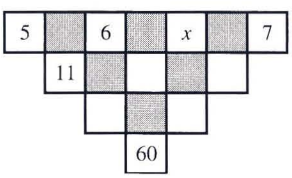
14. ***Capacidad del tanque de gasolina*** Cuando se surten 6 galones de gasolina al tanque de un vehículo, la aguja del medidor va de $\frac{1}{4}$ a $\frac{5}{8}$ del tanque. ¿Cuál es la capacidad total del tanque de gasolina? (21 de febrero de 2004).

15. ***Patrón numérico*** ¿Cuál es la relación entre las filas de números?

18,	38,	24,	46,	42
8,	24,	8,	24,	8

(26 de mayo de 2005).

16. ***Número desconocido*** El número de un cuadrado no sombreado se obtiene sumando los números conectados con él en la fila superior. (El 11 es un número como este). ¿Cuál es el valor de x? (22 de diciembre de 2008).



17. ***Cierre de cajas*** Usted y yo tenemos, cada quien, un candado y la llave correspondiente. Yo quiero enviar a usted una caja con un anillo en ella, pero cualquier caja que no tenga candado será vaciada antes de llegar al destinatario. ¿Cómo puedo enviar con seguridad el anillo? (Observe que usted y yo tenemos llaves de nuestro propio candado, pero no del otro candado). (4 de mayo de 2004).

18. ***Marmota que roe madera*** Nueve marmotas roen ocho piezas de madera en 3 horas. ¿Cuánta madera roe una marmota en una hora? (24 de mayo de 2004).

19. ***Número en una secuencia*** En la secuencia 16, 80, 48, 64, A, B, C, D, cada término después del segundo término es la media aritmética (promedio) de los dos términos anteriores. ¿Cuál es el valor de D? (26 de abril de 2004).

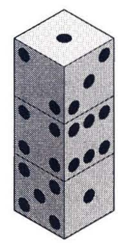
20. ***Número desconocido*** El maestro de Cindy le pidió restar 3 de cierto número y luego dividir el resultado entre 9. En vez de ello, Cindy restó 9, luego dividió el resultado entre 3, y obtuvo una respuesta de 43. ¿Qué debería haber contestado si hubiera trabajado el problema correctamente? (3 de septiembre de 2004).

21. ***Etiquetado de cajas*** Usted trabaja en una tienda que es descuidada con el inventario. Tres cajas de calcetines están etiquetadas incorrectamente. Las etiquetas dicen *calcetines rojos*, *calcetines verdes*, y *calcetines rojos y verdes*. ¿Cómo puede usted volver a etiquetar correctamente las cajas sacando solo un calcetín de una de las cajas, sin mirar dentro de ellas? (22 de octubre de 2001).

22. ***Simetría vertical en los nombres de los estados*** (Si se dibuja una línea vertical que pasa por el centro de una figura, y el lado izquierdo y el derecho son reflejos uno del otro, se dice que esa figura tiene simetría vertical). Cuando escribimos el nombre HAWAI con letras mayúsculas, cada letra tiene simetría vertical. Encuentre el nombre de un estado de EUA que tiene simetría vertical y horizontal en todas sus letras. (11 de septiembre de 2001).

23. ***Suma de los puntos ocultos en un dado*** Tres dados con caras numeradas del 1 al 6 están apilados como se muestra. Siete de las 18 caras son visibles, dejando 11 caras ocultas en la parte posterior, en la parte inferior y entre los dados. El número total de puntos invisibles en esta vista es de _____.

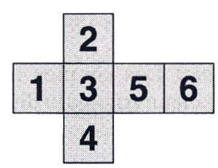
A. 21
B. 22
C. 31
D. 41
E. 53



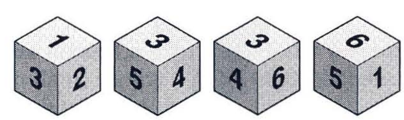
(17 de septiembre de 2001).

24. ***La edad del señor Green*** En su fiesta de cumpleaños, el señor Green no dijo directamente su edad, sino que planteó lo siguiente: "Si usted suma el año de mi nacimiento a este año, resta el año de mi cumpleaños número 10 y el año de mi cumpleaños número 15, y luego suma mi edad actual, el resultado es 80". ¿Qué edad tiene el señor Green? (14 de diciembre de 1997).

25. ***Doblar y desdoblar una caja*** En la siguiente figura se ilustra una caja desdoblada.



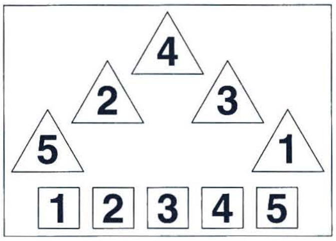
¿Qué figura corresponde a la caja doblada? (7 de noviembre de 2001).



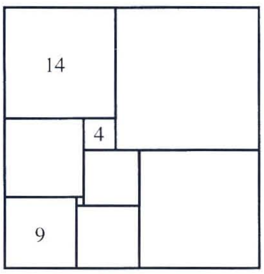
A B C D

26. ***Edad del conductor del autobús*** Hoy es su primer día al volante de un camión urbano. Cuando usted pasa el centro, tiene 23 pasajeros. En la primera parada, bajan 3 personas del autobús y suben 5. En la segunda parada, bajan 11 personas y suben 8. En la tercera parada, bajan 5 personas y suben 10. ¿Qué edad tiene el conductor del autobús? (1 de abril de 2002).

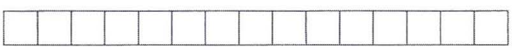
27. ***Asociación de triángulos y cuadrados*** ¿Cómo puede usted asociar cada cuadrado con el triángulo que tiene el mismo número? Las líneas no pueden cruzarse, ni entrar a un cuadrado o a un triángulo, ni tampoco salirse del diagrama. (15 de octubre de 1999).



28. ***Rectángulo cuadrado*** El rectángulo mostrado aquí es un **rectángulo cuadrado** cuyo interior se puede dividir totalmente en dos o más cuadrados. El número escrito dentro de un cuadrado es la longitud del lado de ese cuadrado. Calcule el área de este rectángulo cuadrado. (22 de septiembre de 2009).

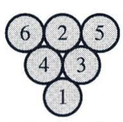


29. ***Sumas de cuadrados perfectos*** ¿Cómo puede uno colocar enteros del 1 al 15 en cada uno de los espacios de abajo de modo que no se repita un número, y la suma de los números en dos espacios consecutivos cualesquiera sea un cuadrado perfecto? (11 de noviembre de 2001).

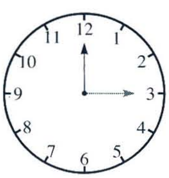


30. ***¿Qué edad?*** Pat y Chris tienen la misma fecha de cumpleaños. Pat tiene el doble de edad que tenía Chris cuando Pat tenía la edad actual de Chris. Si Pat ahora tiene 24 años, ¿qué edad tiene Chris? (3 de diciembre de 2001).

31. ***Triángulo diferencial*** Los círculos numerados del 1 al 6 están acomodados en un **triángulo diferencial**. Observe que en cualquier fila la diferencia entre el más grande y el más pequeño de dos círculos sucesivos es el número del círculo que se encuentra debajo de ellos. Acomode 10 círculos numerados del 1 al 10 en un triángulo diferencial. (6 de mayo de 1998).



32. ***Carátula de un reloj*** Dibujando dos líneas rectas, divida la carátula de un reloj en tres regiones tales que los números en las regiones tengan el mismo total. (28 de octubre de 1998).



33. ***Medición de letras*** Si a, b y c son dígitos para los cuales

$$\begin{array}{r} 7\ a\ 2 \\ -4\ 8\ b \\ \hline c\ 7\ 3, \end{array}$$

entonces, $a + b + c =$ _____.

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17 **E.** 18

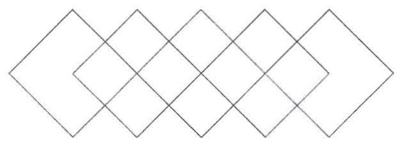
(22 de septiembre de 1999).

34. ***Cuadrado perfecto*** Solo uno de estos números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es? (8 de octubre de 1997).

329476 389372 964328
326047 724203

35. ***Durmiendo rumbo a casa de la abuela*** Mientras se dirigía a la casa de su abuela para pasar la Navidad, George se durmió a la mitad del viaje. Cuando despertó, todavía tenía que recorrer la mitad de la distancia que había viajado mientras dormía. ¿Qué parte del viaje completo se durmió? (25 de diciembre de 1998).

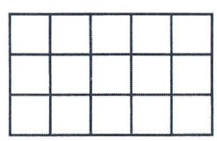
36. ***Conteo de rompecabezas (rectángulos)*** ¿Cuántos rectángulos de cualquier tamaño se encuentran en la figura mostrada? (10 de septiembre de 2001).



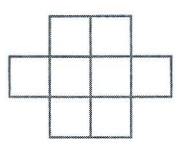
37. ***Baldes de agua*** Usted trajo dos baldes sin marcas a la corriente de agua. Los baldes tienen capacidad de 7 y 3 galones de agua, respectivamente. ¿Cómo puede obtener exactamente 5 galones de agua para llevar a casa? (19 de octubre de 1997).

38. ***Múltiplos de 9*** Los primeros dos de tres múltiplos consecutivos de 9 suman 2511. ¿Cuáles son esos números? (4 de enero de 2010).

39. ***Conteo de rompecabezas (rectángulos)*** ¿Cuántos rectángulos hay en la figura? (27 de marzo de 1997).



40. ***Rompecabezas con dígitos*** Coloque cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en cuadros separados, de modo que los cuadros que compartan esquinas no contengan dígitos sucesivos. (29 de noviembre de 1997).



41. ***Número capicúa*** (*Nota*: Un **número capicúa** o palíndromo es un número cuyos dígitos son los mismos de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 383, 12321 y 9876789 son números capicúa). El odómetro del auto de la familia marca 15951 cuando el conductor nota que el número es capicúa. "Curioso", dice el conductor para sí mismo. "Pasará mucho tiempo antes de que suceda de nuevo". Pero dos horas después, el odómetro marca un nuevo número capicúa. (*Nota del autor:* Suponga que era el próximo posible). ¿Con qué rapidez iba el auto en esas dos horas? (26 de diciembre de 1998).

42. ***¿Cuánto cuesta ese perrito de la ventana?*** Un hombre desea vender un perrito en $11. Un cliente que quiere comprarlo solamente tiene monedas extranjeras. La tasa de cambio de las monedas es como sigue: 11 monedas redondas = $15, 11 monedas cuadradas = $16, 11 monedas triangulares = $17. ¿Cuántas monedas de cada denominación debe pagar el cliente? (20 de abril de 2008).

43. ***Dígitos finales de una potencia de 7*** ¿Cuáles son los dos dígitos finales de 7^{1997}? (29 de noviembre de 1997).

44. ***Números enteros consecutivos*** La suma de nueve números enteros consecutivos es 123,456,789,987,654,321. ¿Cuál es la diferencia entre el más grande y el más pequeño de estos números? (4 de octubre de 2008).

45. ***Suma de números*** Cuando $10^{50} - 50$ se expresa como un número entero, ¿cuál es la suma de sus dígitos? (7 de abril de 2008).

46. ***Dígito de las unidades de una potencia de 3*** Si usted eleva 3 a la potencia 324, ¿cuál es el dígito de las unidades del resultado?

47. ***Dígito de las unidades de una potencia de 7*** ¿Cuál es el dígito de las unidades en 7^{491}?

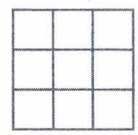
48. ***Rana que trepa un muro*** Una rana se encuentra en la parte inferior de un pozo de 20 pies. Cada día se arrastra hacia arriba 4 pies, pero cada noche se desliza hacia abajo 3 pies. ¿Cuántos días le llevará a la rana alcanzar la parte superior del pozo?

49. ***Visita al correo*** Joanie quiere enviar por correo un paquete que requiere $1.53 de estampillas. Si ella solo tiene estampillas de 5 y 8 centavos, ¿cuál es el menor número de estampillas que debe usar para totalizar exactamente $1.53? (20 de agosto de 2008).

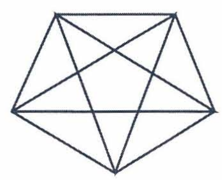
50. ***Dinero gastado en un bazar*** Christine O'Brien compró un libro en $10 y luego gastó la mitad de su dinero restante en un boleto de tren. Luego, ella pagó $4 de almuerzo y gastó la mitad de su dinero restante en un bazar. Abandonó el bazar con $8. ¿Con cuánto dinero inició?

51. ***Pares de calcetines*** Un cajón contiene 20 calcetines negros y 20 calcetines blancos. Si la luz está apagada y usted se estira hacia el cajón para tomar los calcetines, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que debe sacar para garantizar que tiene un juego del mismo color?

52. ***Conteo de cuadrados*** ¿Cuántos cuadrados hay en la figura?



53. ***Conteo de triángulos*** ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



54. ***Diversión con fracciones*** Una tira de papel mide $\frac{2}{3}$ m de longitud. ¿Se puede hacer una tira de exactamente $\frac{1}{2}$ m de largo sin usar una regla? Si es así, ¿cómo? (8 de septiembre de 2008).

55. ***Número perfecto*** Un **número perfecto** es un número natural igual a la suma de todos sus divisores excepto él mismo. Por ejemplo, 28 es un número perfecto porque sus divisores diferentes de él mismo son 1, 2, 4, 7 y 14, y $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. ¿Cuál es el menor número perfecto?

56. ***Nombres de niñas*** La mamá de Becky tiene tres hijas. La primera se llama Penny y la segunda Nichole. ¿Cuál es el nombre de su tercera hija?

57. ***Crecimiento de una hoja de lirio*** Una hoja de lirio crece de tal manera que cada día duplica su tamaño. Al vigésimo día de vida, cubre completamente el estanque. ¿En qué día se cubre la mitad del estanque?

58. ***Propiedad interesante de un enunciado*** Comente sobre una propiedad interesante de esta oración: "Anita lava la tina". (*Sugerencia:* Véase el **ejercicio 41**).

59. ***Graduación de bachillerato del autor*** Uno de los autores de este libro se graduó del bachillerato en el año en que satisfizo estas condiciones: **1.** La suma de los dígitos es 23; **2.** el dígito de las centenas es 3 veces mayor que el dígito de las decenas; **3.** no existe el dígito 8. ¿En qué año se graduó?

60. ***Análisis de unidades*** Un día se divide en 24 horas. Cada hora tiene 60 minutos, y cada minuto tiene 60 segundos. En otro sistema de medición, cada día tiene 20 siestas y cada siesta tiene 40 guiños. ¿Cuántos segundos tiene un guiño? (10 de noviembre de 2008).

61. ***Activos de Adán y Eva*** Eva dijo a Adán: "Si me das un dólar, entonces tendremos la misma cantidad de dinero". Adán le replicó: "Eva, si me das un dólar, tendré el doble de dinero que con el que te quedas". ¿Cuánto tiene cada uno?

62. ***Dígitos faltantes en el rompecabezas*** En el problema de suma que se presenta a continuación, faltan algunos dígitos en los espacios. Si el problema se resuelve correctamente, ¿cuál es la suma de los dígitos que faltan?.

$$\begin{array}{rccc} & \_ & 3 & 5 \\ & 8 & \_ & 6 \\ + & 1 & 4 & \_ \\ \hline \_ & 4 & 0 & 8 \end{array}$$

63. ***Dígitos faltantes en el rompecabezas*** Llene los espacios de manera que el problema de multiplicación use todos los dígitos $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ exactamente una vez, y esté correcto.

$$\begin{array}{rcccc} & & \_ & 0 & 2 \\ \times & & & 3 & \_ \\ \hline \_ & 5, & \_ & \_ & \_ \end{array}$$

64. ***Cuadrado mágico*** Un **cuadrado mágico** es una configuración en un cuadro de números que tiene la propiedad de que la suma de los números de cualquier fila, columna o diagonal es la misma. Complete el siguiente cuadrado, de modo que se convierta en un cuadrado mágico, y se usen todos los dígitos $1, 2, 3, \ldots, 9$ solamente una vez.

6		8
	5	
		4

65. ***Cuadrado mágico*** Remítase al **ejercicio 64**. Complete el cuadrado mágico que se presenta a continuación de forma que todos los números naturales $1, 2, 3, \ldots, 16$ se usen solamente una vez, y la suma de cada fila, columna o diagonal sea 34.

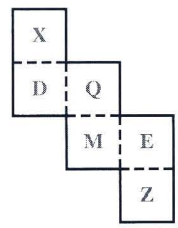
6			9
	15		14
11		10	
16		13	

66. ***Decimal*** ¿Cuál es el centésimo dígito en la representación decimal de $\frac{1}{7}$?

67. ***Lanzamientos en un juego de béisbol*** ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos que puede hacer un jugador de béisbol que lanza un juego completo en un partido reglamentario de 9 entradas?

68. ***Peso de monedas*** Usted tiene ocho monedas. Siete son auténticas y una es falsa (pesa un poco menos que las otras siete). Usted tiene una báscula, la cual solo puede usar tres veces. Diga cómo localizar la moneda falsa en tres pesajes. (Luego muestre cómo detectar la moneda falsa en solo *dos* pesajes).

69. ***Rompecabezas geométrico*** Cuando el diagrama mostrado se dobla en forma de un cubo, ¿cuál es la letra opuesta a la cara marcada con la Z?

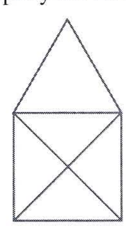


70. ***Patrón numérico*** Si el siguiente patrón continúa, ¿dónde aparecerá el número 289?

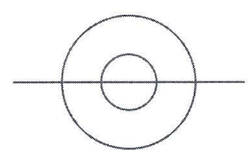
$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 3 & & 5 & \\ 7 & & 9 & & 11 \end{array}$$

(11 de noviembre de 2008).

71. ***Rompecabezas geométrico*** Dibuje la siguiente figura sin separar su lápiz del papel y sin volver a trazar una línea que ya se haya dibujado.



72. ***Rompecabezas geométrico*** Repita el **ejercicio 71** con esta figura.



73. ***Pago de una menta*** Brian Altobello tiene un número ilimitado de monedas de 1 centavo, de 5 y de 10 centavos. ¿De cuántas maneras diferentes puede pagar 15 centavos por un chocolate de menta? (Por ejemplo, una manera es 1 moneda de 10 centavos y 5 monedas de 1 centavo).

74. ***Libros en un estante*** Los volúmenes 1 y 2 de *Las obras completas de Wally Smart* se encuentran en orden numérico de izquierda a derecha en su librero. El volumen 1 tiene 450 páginas y el volumen 2 tiene 475 páginas. Excluyendo las cubiertas, ¿cuántas páginas hay entre la página 1 del volumen 1 y la página 475 del volumen 2?

75. ***Área y perímetro*** El triángulo ABC tiene lados de 10, 24 y 26 cm de largo. Un rectángulo que tiene área igual a la del triángulo mide 3 cm de ancho. Calcule el perímetro del rectángulo. (13 de noviembre de 2008).

76. ***Adolescencia*** La edad de una adolescente con un incremento de 2, genera un cuadrado perfecto. Su edad con una disminución de 10 da la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto. Ella es 5 años mayor que su hermano. ¿Qué edad tiene su hermano?

77. ***Edades*** James, Dan, Jessica y Cathy forman un par de parejas casadas. Sus edades son 36, 31, 30 y 29. Jessica está casada con la persona de mayor edad del grupo. James es mayor que Jessica, pero menor que Cathy. ¿Quién está casado con quién, y cuáles son sus edades?

78. ***Cambio de dinero*** ¿De cuántas maneras diferentes puede usted cambiar medio dólar usando monedas estadounidenses actuales, si no se permiten las monedas de 1 centavo?

79. ***Días en un mes*** Algunos meses tienen 30 días y otros 31. ¿Cuántos meses tienen 28 días?

80. ***Tierra en un hoyo*** ¿Cuánta tierra hay en un hoyo cúbico de 6 pies por lado?

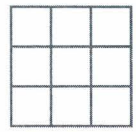
81. ***Dígito final*** ¿Cuál es el último dígito de $49{,}327^{1783}$? (11 de abril de 2009).

82. ***Dígito faltante*** Obtenga el dígito faltante, x, en el producto de

$$(172195)(572167) = 985242x6565.$$

(3 de mayo de 2009).

83. ***Rompecabezas geométrico*** ¿Cuál es el número máximo de cuadrados pequeños en los cuales podemos colocar cruces (×) y no tener ninguna fila, columna o diagonal completamente llena de cruces? Ilustre su respuesta.



84. ***Cambio de dinero*** Webster tiene algunas monedas de 1 centavo, de 10 y de 25 centavos en su bolsillo. Cuando Josefa le pide cambio de un dólar, Webster descubre que no le puede dar el cambio exacto. ¿Cuál es el valor total máximo posible de las monedas en su bolsillo? (5 de octubre de 2009).

85. ***Propiedad de Fibonacci*** Remítase al **ejemplo 1**, y observe la secuencia de números de parejas iniciales. Seleccione cuatro términos sucesivos cualesquiera. Multiplique el primero por el cuarto. Luego multiplique los dos términos de en medio. Repita este proceso. ¿Qué nota usted al comparar los dos productos?

1.4 CÁLCULO, ESTIMACIÓN Y LECTURA DE GRÁFICAS

Cálculo • Estimación • Interpretación de gráficas

La fotografía muestra una calculadora común de cuatro funciones **Sharp EL-2139 HB**.

Desde la aparición de las calculadoras manuales a principios de la década de 1970, los métodos aritméticos cotidianos se han modificado drásticamente. Uno de los primeros modelos disponibles para el consumidor fue la SR-10 de Texas Instruments, la cual se vendió en aproximadamente $150 en 1973. Podía ejecutar las cuatro operaciones aritméticas y obtener raíces cuadradas, y apenas un poco más.

Cálculo

La búsqueda de caminos más fáciles para calcular y contar desembocó en el desarrollo de calculadoras manuales y computadoras. Para la gente común, una calculadora que ejecuta las operaciones aritméticas y otras cuantas funciones es suficiente. Estas se conocen como **calculadoras de cuatro funciones**. Los estudiantes que toman cursos de matemáticas avanzadas (los ingenieros, por ejemplo) necesitan generalmente la potencia de las **calculadoras científicas**. Existen también las **calculadoras graficadoras**, las cuales son capaces de trazar gráficas en pequeñas pantallas. ***Consulte siempre su manual del usuario si necesita ayuda en la ejecución de una operación con su calculadora. Si requiere ayuda adicional, pregunte a su profesor o a otro estudiante que utilice el mismo modelo.***

Los modelos actuales de calculadoras difieren de las primeras versiones en que pueden desplegar, en la misma pantalla, tanto la información que introduce el usuario como el resultado que se obtiene. De esta manera, el usuario puede verificar que la información introducida en la calculadora es correcta. Aun cuando no es necesario tener una calculadora graficadora para estudiar el material de este texto, ocasionalmente incluiremos pantallas de una calculadora graficadora para dar apoyo a los resultados obtenidos o para brindar información complementaria.*

*Como TI-83 Plus y TI-84 Plus de Texas Instruments son los modelos más conocidos de calculadoras graficadoras, incluimos pantallas similares a las de estos modelos.

Aquí se muestra la conocida calculadora graficadora **TI-84 Plus**.

Las pantallas que siguen ilustran algunas entradas y operaciones comunes.

A

3+9	12	$3 + 9 = 12$
7−2	5	$7 - 2 = 5$
4∗5	20	$4 \times 5 = 20$

B

24/20	1.2	$\frac{24}{20} = 1.2$
Ans▸Frac	$\frac{6}{5}$	$1.2 = \frac{6}{5}$
5−(8−7)	4	$5 - (8 - 7) = 4$

C

7^2	49	$7^2 = 49$
5^3	125	$5^3 = 125$
$\sqrt{81}$	9	$\sqrt{81} = 9$

La pantalla A muestra cómo se realiza la suma, resta o multiplicación de dos números. La pantalla B muestra cómo se efectúa una división de dos números, cómo el cociente decimal (almacenado en la celda de memoria Ans) se puede convertir en una fracción, y cómo se usan los paréntesis en un cálculo. La pantalla C muestra cómo se eleva un número al cuadrado, al cubo, y cómo se puede obtener la raíz cuadrada.

D

$\sqrt[3]{27}$	3	$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[4]{16}$	2	$\sqrt[4]{16} = 2$
5^{-1}	.2	$5^{-1}(\text{o } \frac{1}{5}) = .2$

E

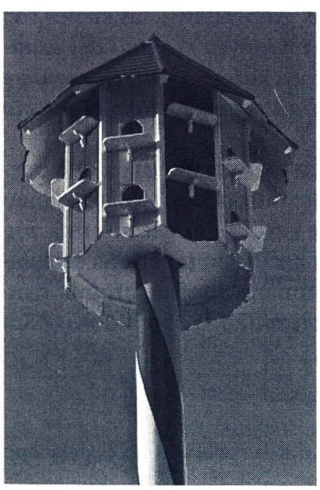
π	3.141592654
5!	120
6265804∗8980591	5.627062301E13

$\pi \approx 3.141592654$
$5!$ (o $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$) $= 120$
$6{,}265{,}804 \times 8{,}980{,}591 \approx 5.627062301 \times 10^{13}$
≈ indica "es aproximadamente igual a"

La pantalla D ilustra cómo se calculan otras raíces (raíz cúbica y raíz cuarta), y cómo se obtiene el recíproco de un número usando −1 como exponente. La pantalla E muestra cómo se tiene acceso a π con una tecla especial, cómo se obtiene un **factorial** (simbolizado por !) y cómo se podría desplegar un resultado en **notación científica**. ("E13" en seguida de 5.627062301 significa que este número se multiplica por 10^{13}. Esta respuesta todavía es una aproximación, porque el producto $6{,}265{,}804 \times 8{,}980{,}591$ contiene más dígitos de los que la calculadora puede desplegar).

Estimación

Si bien las calculadoras nos facilitan la realización de cálculos, muchas veces solo necesitamos la respuesta aproximada de un problema; en tales casos quizá no sea necesaria una calculadora.



EJEMPLO 1 Estimación del número adecuado de pajareras

Una pajarera de golondrinas puede alojar hasta 8 nidos. ¿Cuántas pajareras se necesitarían para albergar 58 nidos?

SOLUCIÓN

Si dividimos 58 entre 8, ya sea a mano o con una calculadora, obtenemos 7.25. ¿Es este el número deseado? Desde luego que no, porque no podemos considerar fracciones de pajarera. ¿Necesitamos 7 pajareras u 8? Para dar espacio de anidamiento a los nidos por arriba de las 7 que indica la fracción decimal, debemos planear el uso de 8 pajareras. En este problema, debemos redondear nuestra respuesta *hacia arriba* hasta el siguiente número natural.

EJEMPLO 2 Aproximación al número promedio de yardas por avance

En la temporada 2009 de futbol americano, Cedric Benson realizó 301 avances por tierra para completar 1251 yardas (*Fuente:* www.nfl.com). Aproxime su promedio de yardas por corrida (acarreo) en ese año.

SOLUCIÓN

Como solo necesitamos el promedio aproximado de Cedric, se puede decir que corrió 300 veces para totalizar alrededor de 1200 yardas, y su promedio fue $\frac{1200}{300} = 4$ yardas por corrida, aproximadamente. (Una calculadora indica que su promedio, con una aproximación a la décima más cercana, es de 4.2 yardas por corrida. Compruebe esto).

EJEMPLO 3 Comparación de proporciones de trabajadores por grupos de edad

En un año reciente, había aproximadamente 127,000 hombres, dentro del intervalo de edad comprendido entre 25 y 29 años, que trabajaban en el campo. Esto representa parte del total de 238,000 trabajadores agrícolas en ese rango de edad. De los 331,000 trabajadores agrícolas entre 40 y 44 años de edad, 160,000 eran hombres. Sin usar calculadora, determine qué intervalo de edad tenía una mayor proporción de hombres.

SOLUCIÓN

Piense en términos de miles en lugar de manejar todos los ceros. Primero analizamos el intervalo de edad de 25 a 29 años. Como había un total de 238 mil trabajadores, de los cuales 127 mil eran hombres, había

$238 - 127 = 111$ mil mujeres trabajadoras. Más de la mitad eran hombres.

En el rango de edad de 40 a 44 años, de los 331 mil trabajadores, 160 mil eran hombres, lo que da

$331 - 160 = 171$ mil mujeres trabajadoras. Menos de la mitad eran hombres.

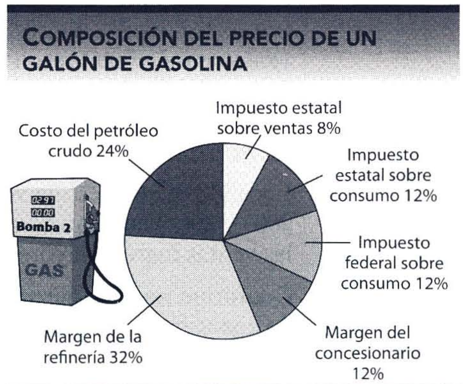
El intervalo de edad de 25 a 29 años tenía la proporción más grande de hombres.

Interpretación de gráficas

En una **gráfica circular** o **gráfica de pastel**, se usa un círculo para indicar el total de todos los grupos de datos representados. El círculo se divide en sectores o trozos (como si se tratara de rebanadas de un pastel), cuyos tamaños muestran las magnitudes relativas de los grupos. La suma de todas las partes fraccionarias debe ser 1 (para dar el círculo completo).

EJEMPLO 4 Interpretación de la información de una gráfica circular

Use la gráfica circular de la **figura 9** para determinar cuánto de los \$3.50 gastados en un galón de gasolina en California corresponde a la refinería y cuánto al costo del petróleo crudo.



Fuente: California Energy Commission.

Figura 9

SOLUCIÓN

Los sectores en la gráfica circular de la **figura 9** tienen una dimensión que corresponde a la división del precio. Por ejemplo, la mayor parte del precio (32%) corresponde a la refinería, mientras que la parte más pequeña (8%) corresponde al impuesto estatal sobre ventas. Como se esperaba, el porcentaje totaliza el 100%. El precio de la gasolina es de \$3.50 por galón.

$$\text{Margen de la refinería: } \$3.50 \times \underbrace{0.32}_{\text{El 32\% convertido a decimal}} = \$1.12$$

$$\text{Costo del petróleo crudo: } \$3.50 \times \underbrace{0.24}_{\text{El 24\% convertido a decimal}} = \$0.84$$

Una **gráfica de barras** se usa para hacer comparaciones. Consiste en una serie de barras (reales o simuladas) configuradas en forma vertical u horizontal. En una gráfica de barras, con los valores de dos grupos se forman parejas (por ejemplo, años con ventas).

EJEMPLO 5 Interpretación de la información de una gráfica de barras

La gráfica de barras de la **figura 10** muestra las ventas de motonetas en Estados Unidos, las cuales han aumentado su popularidad debido a su ahorro de combustible. La gráfica compara las ventas en miles.

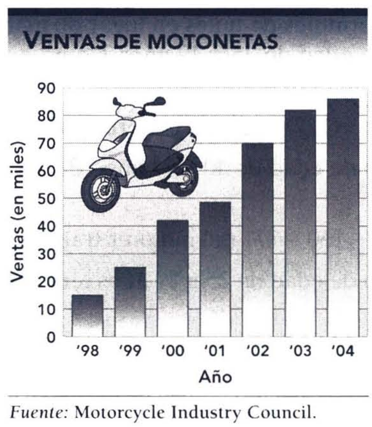


Figura 10

a) Estime las ventas en 2000 y 2004.

b) ¿En qué años las ventas rebasaron la cifra de 50 mil?

c) Describa el cambio en las ventas conforme transcurrieron los años.

SOLUCIÓN

a) Localice la parte superior de la barra del 2000, y desplácese en forma horizontal a través de la escala vertical para ver que es de aproximadamente 40. De modo que las ventas en el 2000 fueron de 40 mil aproximadamente. Siga la parte superior de la barra para 2004 a través de la escala vertical para ver que se encuentra aproximadamente a la mitad entre 80 y 90 mil, de modo que las ventas en 2004 fueron de 85 mil aproximadamente.

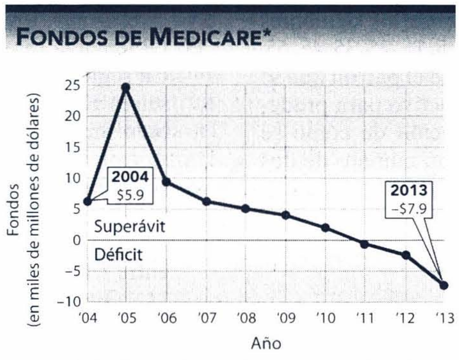
b) Localice 50 en la escala vertical y siga la línea hacia la derecha. Hay tres años (2002, 2003 y 2004) con barras que se extienden por encima de la línea de 50, de modo que las ventas fueron mayores de 50 mil en esos años.

c) Conforme transcurrieron los años, las ventas se incrementaron de manera constante, de aproximadamente 15 mil en 1998 a alrededor de 85 mil en 2004.

Una **gráfica lineal** se usa para mostrar cambios o tendencias en los datos a lo largo del tiempo. Para crear una gráfica lineal, unimos una serie de puntos, los cuales representan datos, con segmentos de recta.

EJEMPLO 6 Interpretación de información de una gráfica lineal

Las proyecciones actuales indican que los recursos de Medicare no cubrirán sus costos a menos que el programa se modifique. La gráfica lineal de la **figura 11** muestra los fondos de Medicare en miles de millones de dólares de los años 2004 a 2013.



Fuente: Centros de Medicare y Servicios Medicaid.
*Proyección

Figura 11

a) Estime los fondos de los años 2005 y 2006. ¿Aproximadamente cuánto disminuyeron de 2005 a 2006?

b) ¿Cuál es el único periodo en el cual aumentaron los fondos de Medicare? ¿Cuál es la tendencia proyectada de 2005 a 2013?

c) De acuerdo con las proyecciones, ¿en qué año se ve que los fondos tendrán el primer déficit?

SOLUCIÓN

a) En la parte inferior de la gráfica, localice el 2005 y lea hacia arriba hasta encontrar el punto que tiene una altura de aproximadamente 25 (miles de millones de dólares). De manera similar, el punto para 2006 tiene una altura de aproximadamente 10 (miles de millones de dólares). Los fondos *disminuyeron* aproximadamente

$25 - 10 = 15$ mil millones de dólares. Cantidad de 2005 – cantidad de 2006

b) La gráfica se *eleva* de 2004 a 2005, de modo que los fondos se incrementaron entre estos dos años. La gráfica *desciende* de 2005 a 2013, de manera que los fondos disminuyeron.

c) De 2004 a 2010, la gráfica siempre está arriba de cero, pero en 2011 desciende ligeramente por debajo de cero por primera vez, lo que indica un déficit. ▮▮▮

1.4 EJERCICIOS

Realice las operaciones indicadas e incluya tantos dígitos en su respuesta como muestre la pantalla de su calculadora. (El número de dígitos desplegados puede variar dependiendo del modelo utilizado).

1. $39.7 + (8.2 - 4.1)$

2. $2.8 \times (3.2 - 1.1)$

3. $\sqrt{5.56440921}$

4. $\sqrt{37.38711025}$

5. $\sqrt[3]{418.508992}$

6. $\sqrt[3]{700.227072}$

7. 2.67^2

8. 3.49^3

9. 5.76^5

10. 1.48^6

11. $\dfrac{14.32 - 8.1}{2 \times 3.11}$

12. $\dfrac{12.3 + 18.276}{3 \times 1.04}$

13. $\sqrt[5]{1.35}$

14. $\sqrt[6]{3.21}$

15. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

16. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

17. $\sqrt[4]{\dfrac{2143}{22}}$

18. $\dfrac{12{,}345{,}679 \times 72}{\sqrt[3]{27}}$

19. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{6}}$

20. $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{3}}$

21. Elija cualquier número de cinco dígitos. Multiplíquelo por 9 en su calculadora. Ahora sume los dígitos de la respuesta. Si la suma es mayor que 9, sume los dígitos de esta suma, y repita el proceso hasta que la suma sea menor que 10. Su respuesta siempre será 9. Repita el ejercicio con un número de seis dígitos. ¿Se mantiene el mismo resultado?

22. Use su calculadora para *elevar al cuadrado* los siguientes números de dos dígitos que terminan en 5: 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85. Escriba los resultados y examine el patrón que se desarrolla. Luego use razonamiento inductivo para predecir el valor de 95^2. Escriba una explicación de cómo se puede elevar al cuadrado mentalmente un número de dos dígitos terminado en 5.

Realice todos los cálculos y observe las respuestas. Luego llene el espacio con la respuesta adecuada.

23. $\frac{-3}{-8}$; $\frac{-5}{-4}$; $\frac{-2.7}{-4.3}$

Al dividir un número negativo entre otro número negativo se obtiene un resultado ________________.
(negativo/positivo)

24. $5 \cdot -4$; $-3 \cdot 8$; $2.7 \cdot -4.3$

Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un resultado ________________.
(negativo/positivo)

25. 5.6^0; π^0; 2^0; 120^0

Al elevar un número diferente de cero a la potencia 0 se obtiene un resultado igual a ______.

26. 1^2; 1^3; 1^{-3}; 1^0

Al elevar 1 a cualquier potencia se obtiene un resultado igual a ______.

27. $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{-9}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{-8}$

El signo del recíproco de un número es ________________ el signo del número. (igual que/diferente de)

28. $5 \div 0$; $9 \div 0$; $0 \div 0$

Al dividir un número entre cero resulta ________________ en una calculadora.

29. $0 \div 8$; $0 \div -2$; $0 \div \pi$

Cero dividido entre un número diferente de cero nos da un cociente igual a ______.

30. $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-10}$

Al obtener la raíz cuadrada de un número negativo nos da ________________ en la calculadora.

31. $-3 \cdot -4 \cdot -5$; $-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6 \cdot -7$;

$-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6 \cdot -7 \cdot -8 \cdot -9$

Al multiplicar un número *impar* de números negativos se obtiene un número ________________.
(positivo/negativo)

32. $-3 \cdot -4$; $-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6$;

$-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6 \cdot -7 \cdot -8$

Al multiplicar un número *par* de números negativos se obtiene un número ________________.
(positivo/negativo)

33. Obtenga la representación decimal de $\frac{1}{6}$ en su calculadora. En seguida del punto decimal habrá un 1 y una cadena de seises. El dígito final será un 7 si su calculadora *redondea*, o bien, un 6 si *trunca*. ¿Qué clase de calculadora tiene?

34. Elija un número de tres dígitos e introdúzcalo en su calculadora. Luego introdúzcalo nuevamente para obtener un número de seis dígitos. Divida este número de seis dígitos entre 7. Divida el resultado entre 13. Divida el resultado entre 11. ¿Qué es lo interesante del resultado? Explique por qué sucede esto.

35. Elija un dígito diferente de 0. Multiplíquelo por 429. Ahora multiplique el resultado por 259. ¿Qué es lo interesante del resultado? Explique por qué sucede esto.

36. Elija dos números naturales. Sume 1 al segundo y divídalo entre el primero para obtener un tercero. Sume 1 al tercero y divídalo entre el segundo para obtener un cuarto. Sume 1 al cuarto y divídalo entre el tercero para obtener un quinto. Continúe este proceso hasta que descubra un patrón. ¿Cuál es ese patrón?

En las respuestas de cada pregunta de los ejercicios 37 a 40 dé el número natural adecuado. (Obtenga el número natural más pequeño).

37. ***Hojas para almacenar tarjetas de presentación*** Una hoja de plástico, diseñada para guardar tarjetas de presentación, contiene hasta 9 tarjetas. ¿Cuántas hojas serán necesarias para almacenar 563 tarjetas?

38. ***Gavetas para DVD*** Una gaveta con corredera diseñada para guardar cajas de DVD tiene 20 compartimentos. Si Chris quiere guardar su colección de 408 DVD de Disney, ¿cuántas gavetas como esta necesitará?

39. ***Contenedores de violetas africanas*** Un jardinero desea fertilizar 800 violetas africanas. Cada contenedor de fertilizante alcanza para 60 plantas. ¿Cuántos contenedores necesita para hacer el trabajo?

40. ***Se solicitan maestros de quinto grado*** La Academia False River tiene 155 alumnos de quinto grado. El director, Butch LeBeu, determinó que cada maestro de quinto grado debe tener un máximo de 24 alumnos. ¿Cuántos maestros de quinto grado necesita?

En los ejercicios 41 a 46, use estimaciones para determinar la elección más cercana a la respuesta correcta.

41. ***Precio por acre de tierra*** La fundación no lucrativa Long Now compró 80 acres de tierra por $140,000, para construir el "reloj del milenio" en Mount Washington, Nevada, el cual dará un tictac al año, repicará una vez al siglo, y durará por lo menos 10,000 años. ¿Cuál de las siguientes estimaciones es la más cercana al precio por acre?

A. $1000 **B.** $2000 **C.** $4000 **D.** $11,200

42. ***Duración de un viaje redondo*** La distancia de Seattle, Washington, a Springfield, Missouri, es de 2009 millas. ¿Aproximadamente cuántas horas tardará en hacer un viaje redondo de Seattle a Springfield un autobús que promedia 50 millas por hora?

A. 60 **B.** 70 **C.** 80 **D.** 90

43. ***Densidad de población por milla cuadrada*** El condado de Buffalo en Nebraska tiene una población de 40,249 habitantes y cubre 968 millas cuadradas. ¿Aproximadamente cuántas personas por milla cuadrada viven en el condado de Buffalo?

A. 40 **B.** 400 **C.** 4000 **D.** 40,000

44. ***Revoluciones de Mercurio*** El planeta Mercurio tarda 88.0 días terrestres en dar una vuelta al Sol. Plutón tarda 90,824.2 días en hacer lo mismo. Cuando Plutón da una vuelta alrededor del Sol, ¿aproximadamente cuántas vueltas habrá dado Mercurio alrededor del Sol?

A. 100,000 **B.** 10,000 **C.** 1000 **D.** 100

45. ***Recepciones promedio*** En 2009 Brandon Marshall, de los Broncos de Denver, completó 101 pases para 1120 yardas. Su número aproximado de yardas ganadas por pase completo fue de ________.

A. $\frac{1}{11}$ **B.** 110 **C.** 1.1 **D.** 11

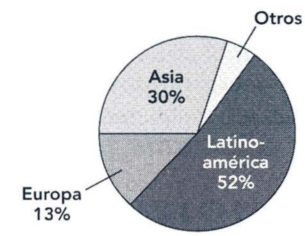
46. ***Área de la Capilla Sixtina*** La Capilla Sixtina del Vaticano mide 40.5 metros por 13.5 metros.

¿Cuál es la aproximación más cercana de su área?

A. 110 metros **B.** 55 metros
C. 110 metros cuadrados **D.** 600 metros cuadrados

Inmigración *La gráfica circular que se presenta a continuación muestra el porcentaje aproximado de inmigrantes admitidos en Estados Unidos durante la década de 1990. Use la gráfica para contestar las preguntas de los ejercicios 47 a 50.*

INMIGRANTES DE ESTADOS UNIDOS POR REGIÓN DE NACIMIENTO



Fuente: U.S. Bureau of the Census.

47. ¿Qué porcentaje de inmigrantes son del grupo de "otros" países?

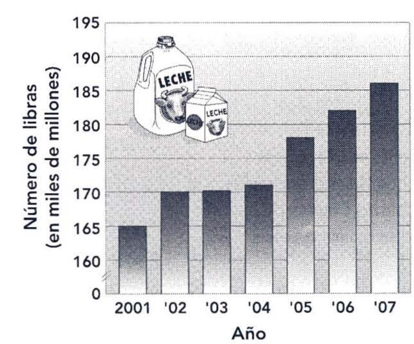
48. ¿Qué porcentaje de inmigrantes no son de Asia?

49. En un grupo de 2,000,000 de inmigrantes, ¿cuántos esperaría que fueran de Europa?

50. En un grupo de 4,000,000 de inmigrantes, ¿con cuántos rebasaría Latinoamérica a las demás regiones combinadas?

Producción de leche *La gráfica de barras muestra la producción total de leche en Estados Unidos en miles de millones de libras de los años 2001 a 2007. Use la gráfica de barras para trabajar los ejercicios 51 a 54.*

PRODUCCIÓN DE LECHE EN ESTADOS UNIDOS



Fuente: Departamento de Agricultura de Estados Unidos.

51. ¿En qué años la producción de leche en Estados Unidos fue mayor a 175 miles de millones de libras?

52. ¿En qué par de años la producción de leche en Estados Unidos fue más o menos la misma?

53. Estime la producción de leche en Estados Unidos en 2001 y 2007.

54. Describa el cambio en la producción de leche en Estados Unidos de 2001 a 2007.

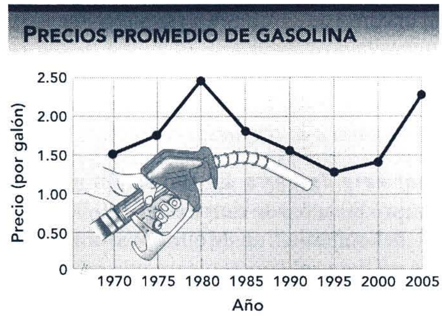
Precios de gasolina *La gráfica lineal muestra el precio promedio, ajustado por la inflación, que los estadounidenses han pagado por un galón de gasolina durante los años seleccionados a partir de 1970. Use la gráfica lineal para trabajar los ejercicios 55 a 58.*

55. ¿En qué periodo de 5 años se registró el mayor incremento en el precio de un galón de gasolina? ¿Aproximadamente de cuánto fue el incremento?

56. Estime el precio de un galón de gasolina durante 1985, 1990, 1995 y 2000.

57. Describa la tendencia en los precios de gasolina de 1980 a 1995.

58. ¿Durante qué año(s) un galón de gasolina costó aproximadamente $1.50?



Fuente: Energy Information Administration.

EXTENSIÓN Uso de la escritura para aprender matemáticas

Diarios • Bitácoras de aprendizaje • Informes sobre artículos • Ensayos

La escritura matemática adopta muchas formas. Uno de los más famosos escritores y matemático fue **Charles Dogson** (1832-1898), quien usó el seudónimo de **Lewis Carroll**.

Dodgson fue profesor de matemáticas en la Universidad de Oxford en Inglaterra. La reina Victoria comunicó a Dodgson cuánto disfrutó las Aventuras de Alicia en el País de las Maravillas y cuánto deseaba leer su nuevo libro. Él le envió su *Lógica simbólica*, su trabajo matemático más famoso.

Los libros de Alicia hicieron famoso a Carroll. Sin embargo, al final de su vida, Dogson rechazó la fama y negó que él y Carroll fueran la misma persona, aun cuando firmó cientos de ejemplares a los niños en hospitales infantiles.

La investigación ha mostrado que la habilidad para expresar observaciones matemáticas en documentos es un estímulo que favorece el desarrollo continuo de un estudiante de matemáticas. La implementación de la escritura en la clase de matemáticas puede tener varios enfoques.

Diarios Una manera de practicar la escritura en relación con las matemáticas es llevar un diario al que le dedique unos cuantos minutos explicando lo que pasó en la clase ese día. Las actualizaciones del diario pueden ser generales o específicas, dependiendo del tema de que se trate, el nivel de su comprensión del tema, el grado de interés en ese momento, etcétera. Las actualizaciones del diario normalmente se escriben en lenguaje informal y con frecuencia son un medio de comunicación eficaz con uno mismo, con los compañeros de clase y el profesor, acerca de las opiniones, las percepciones y los intereses personales en ese momento.

Bitácoras de aprendizaje Si bien las actualizaciones al diario son las partes menos estructuradas de los documentos, en las cuales se permite que los pensamientos de los estudiantes fluyan con libertad, las actualizaciones a una bitácora de aprendizaje normalmente son más estructuradas. Un profesor puede hacer una pregunta específica a un estudiante para que la conteste en su bitácora de aprendizaje. En este texto intercalamos ejercicios de escritura en cada conjunto de problemas, que son adecuados para incluir en la bitácora de aprendizaje. Por ejemplo, considere el **ejercicio 13** del grupo de ejercicios de la sección de inicio de este capítulo.

Analice las diferencias entre los razonamientos inductivo y deductivo. Dé un ejemplo de cada uno.

Esta es una posible respuesta a ese ejercicio.

El razonamiento deductivo ocurre cuando uno parte de ideas generales a ideas específicas. Por ejemplo, sé que puedo multiplicar ambos lados de $\frac{1}{2}x = 6$ por 2 para obtener $x = 12$, porque sé que puedo multiplicar ambos lados de cualquier ecuación por lo que yo quiera (excepto por 0). El razonamiento inductivo va en sentido contrario. Si yo obtengo una conclusión general a partir de observaciones específicas, ese es un razonamiento inductivo. Por ejemplo: a partir de la lista de números 4, 8, 12, 16, etcétera, puedo concluir que el siguiente número es 20, puesto que siempre se suma 4 al número anterior para obtener el siguiente número.

Informes sobre artículos El aforismo "Publicar o morir" es muy viejo, y quiere decir que un especialista en búsqueda de posición académica debe publicar en una revista relacionada con su campo. Existen numerosas revistas que publican documentos de investigación de matemáticas y/o de enseñanza de matemáticas. En la actividad 3 sugerimos algunos artículos que se han publicado en los últimos años. Redactar un informe sobre un artículo como estos puede ayudarle a entender lo que hacen los matemáticos y las ideas que usan los maestros para transmitir conceptos a los estudiantes.

Ensayos Los profesores de cursos breves de matemáticas, cada vez con mayor frecuencia, solicitan a sus alumnos que redacten ensayos. De esta forma, uno toma conciencia de la plétora de matemáticos que existen, y de libros y artículos sobre matemáticas, muchos de los cuales están escritos específicamente para legos. En las actividades 5 y 6 se presenta una lista de posibles temas de ensayos.

ACTIVIDADES DE LA EXTENSIÓN

En vez de incluir un grupo típico de ejercicios, listamos algunas actividades que se sugieren para practicar la escritura y así enriquecer el conocimiento y el aprendizaje de las matemáticas.

Actividad 1 Lleve un diario. Después de cada clase, escriba durante unos cuantos minutos acerca de sus percepciones y los temas cubiertos, o sobre cualquier asunto que considere importante.

Actividad 2 Lleve una bitácora de aprendizaje, contestando por escrito por lo menos uno de los ejercicios de cada uno de los grupos de ejercicios de su programa de estudio. Pida sugerencias a su profesor acerca de otros tipos específicos de tareas de escritura.

Actividad 3 El National Council of Teachers of Mathematics publica revistas sobre enseñanza de matemáticas: *Teaching Children Mathematics* y *Mathematics Teacher* son dos que se pueden encontrar en línea o en la sección de publicaciones periódicas en la mayoría de las bibliotecas universitarias. Hemos seleccionado varios artículos recientes de cada una de estas publicaciones. Escriba un informe breve acerca de estos artículos de acuerdo con la guía específica de su profesor.

De *Mathematics Teacher*

2004

Devaney, Robert L. "Fractal Patterns and Chaos Games", noviembre de 2004, p. 228.

Francis, Richard L. "New Worlds to Conquer", octubre de 2004, p. 166.

Hansen, Will. "War and Pieces", septiembre de 2004, p. 70.

Mahoney, John F. "How Many Votes Are Needed to Be Elected President?", octubre de 2004, p. 154.

2005

Clausen, Mary C. "Did You 'Code'?", noviembre de 2005, p. 260.

Comstock, Jocelyne M., Sean P. Madden y James P. Downing. "Paper Moon: Simulating a Total Solar Eclipse", diciembre de 2005/enero de 2006, p. 312.

Parker, Dennis. "Partitioning the Interior of a Circle with Chords", septiembre de 2005, p. 120.

Quinn, Jennifer J. y Arthur T. Benjamin. "Revisiting Fibonacci and Related Sequences", diciembre de 2005/enero de 2006, p. 357.

2006

Cline, Kelly S. "Classroom Voting in Mathematics", septiembre de 2006, p. 100.

Gordon, Sheldon P. "Placement Tests: The Shaky Bridge Connecting School and College Mathematics", octubre de 2006, p. 174.

Johnson, Iris DeLoach. "Grandfather Tang Goes to High School", marzo de 2006, p. 522.

Wong, Michael. "The Human Body's Built-In Range Finder: The Thumb Method of Indirect Distance Measurement", mayo de 2006, p. 622.

De *Teaching Children Mathematics*

2004

Anthony, Glenda J. y Margaret A. Walshaw. "Zero: A 'None' Number?", agosto de 2004, p. 38.

Buschman, Larry. "Teaching Problem Solving in Mathematics", febrero de 2004, p. 302.

Joram, Elana, Christina Hartman y Paul R. Trafton. " 'As People Get Older, They Get Taller': An Integrated Unit on Measurement, Linear Relationships, and Data Analysis", marzo de 2004, p. 344.

Mann, Rebecca L. "Balancing Act: The Truth Behind the Equals Sign", septiembre de 2004, p. 65.

2005

Flores, Alfinio, Erin E. Turner y Renee C. Bachman. "Posing Problems to Develop Conceptual Understanding: Two Teachers Make Sense of Division of Fractions", octubre de 2005, p. 17.

Hansen, Laurie E. "ABCs of Early Mathematics Experiences", noviembre de 2005, p. 208.

Sherrill, Carl M. "Math Riddles: Helping Children Connect Words and Numbers", marzo de 2005, p. 368.

Thompson, Tony, y Stephen Sproule. "Calculators for Students with Special Needs", marzo de 2005, p. 391.

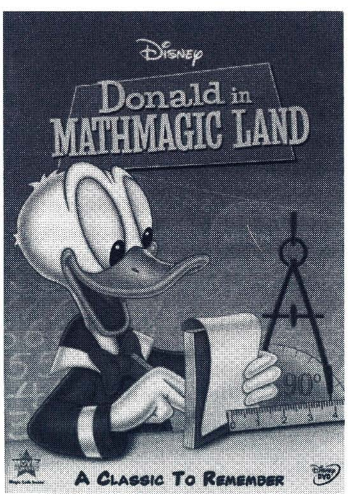
2006

Barnes, Mary Kathleen. "How Many Days 'til My Birthday? Helping Kindergarten Students Understand Calendar Connections and Concepts", febrero de 2006, p. 290.

Cassel, Darlinda, Anne Reynolds y Eileen Lillard. "A Mathematical Exploration of Grandpa's Quilt", marzo de 2006, p. 340.

de Groot, Cornelis y Timothy Whalen. "Longing for Division", abril de 2006, p. 410.

Nugent, Christina M. "How Many Blades of Grass Are on a Football Field?", febrero de 2006, p. 282.



© Disney Enterprises, Inc.

Actividad 4 Una de las películas de matemáticas más famosas de todos los tiempos es el corto de 1959 de Disney *Donald in Mathmagic Land*, disponible en DVD. Pase media hora de entretenimiento viendo esta película, y escriba un informe sobre ella, de acuerdo con las instrucciones de su profesor.

Actividad 5 Escriba un informe de acuerdo con las instrucciones de su profesor sobre uno de los siguientes matemáticos, filósofos y científicos.

Abel, N.	Cardano, G.	Gauss, C.	Noether, E.
Agnesi, M. G.	Copérnico, N.	Hilbert, D.	Pascal, B.
Agnesi, M. T.	De Morgan, A.	Kepler, J.	Pitágoras
Al-Khowârizmi	Descartes, R.	Kronecker, L.	Platón
Apolonio	Euler, L.	Lagrange, J.	Polya, G.
Aristóteles	Fermat, P.	Leibniz, G.	Ramanujan, S.
Arquímedes	Fibonacci (Leonardo de Pisa)	L'Hôspital, G.	Riemann, G.
Babbage, C.		Lobachevsky, N.	Russell, B.
Bernoulli, Jakob		Mandelbrot, B.	Somerville, M.
Bernoulli, Johann	Galileo (Galileo Galilei)	Napier, J.	Tartaglia, N.
		Nash, J.	Whitehead, A.
Cantor, G.	Galois, E.	Newton, I.	Wiles, A.

Actividad 6 Escriba un ensayo sobre alguno de los siguientes temas de matemáticas, de acuerdo con las instrucciones de su profesor.

Matemáticas en Babilonia
Matemáticas egipcias
El origen del cero
Plimpton 322
El papiro Rhind
Orígenes del teorema de Pitágoras
Los sólidos regulares (platónicos)
La hermandad pitagórica
La proporción áurea

Los tres famosos problemas de construcción de los griegos
La historia de las aproximaciones de π
Euclides y sus "elementos"
Albores de las matemáticas en China
Albores de las matemáticas en India
Origen de la palabra *álgebra*
Cuadrados mágicos
Números figurados
La secuencia de Fibonacci
La controversia Cardano/Tartaglia
Métodos históricos de cálculo (logaritmos, el ábaco, varillas de Napier, la regla de cálculo, etcétera)
El triángulo de Pascal
Orígenes de la teoría de la probabilidad
Mujeres matemáticas
Paradojas matemáticas
Problemas sin resolver en matemáticas
Teorema de los cuatro colores
La demostración del último teorema de Fermat
La búsqueda de números primos grandes
Geometría de fractales
Los coinventores del cálculo
El papel de la computadora en el estudio de las matemáticas
Matemáticas y música
Matemática policial
Orígenes de los números complejos
Conjetura de Goldbach
Uso de Internet en la enseñanza de las matemáticas
Desarrollo de calculadoras graficadoras
Movimiento de reforma de la enseñanza de matemáticas
Matemáticas multiculturales
La hipótesis de Riemann

Actividad 7 Investigue un programa de computadora enfocado en la enseñanza de las matemáticas elementales a los niños, y redacte un estudio crítico como si usted escribiera para una revista especializada en material de software didáctico. Asegúrese de referirse a las habilidades racionales de alto nivel, además de los ejercicios y la práctica.

Actividad 8 Los siguientes sitios Web ofrecen una lista fascinante de temas matemáticos. Visite uno de ellos, seleccione un tema que le interese y redacte un informe de acuerdo con las instrucciones de su profesor.

www.mathworld.wolfram.com

www.world.std.com/~reinhold/mathmovies.html

www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/

http://dir.yahoo.com/Science/Mathematics/

www.cut-the-knot.com/

www.ics.uci.edu/~eppstein/recmath.html

Actividad 9 A lo largo de este libro nos referiremos a escenas de películas y televisión relacionadas con las matemáticas. Elabore un informe sobre una o más de estas escenas, y determine si las matemáticas implicadas son correctas o incorrectas. Si son correctas, indique por qué. Si son incorrectas, obtenga la respuesta correcta. Visite los sitios www.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/ y www.mathclassgoestohollywood.com.

Actividad 10 La serie animada de televisión de mayor duración es la de *Los Simpson*, que inició en 1989. El sitio Web www.simpsonsmath.com explora la presencia de las matemáticas en los episodios de diferentes temporadas. Vea varios episodios y explique con detalle las matemáticas que encuentra en ellos.

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Descubrimiento de patrones en el triángulo de Pascal

El **triángulo de Pascal** es una configuración fascinante que consiste en filas de números, cada una de las cuales contiene un número más que la anterior. Las primeras seis filas se muestran aquí.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Para descubrir algunos de sus patrones, divídase la clase en grupos de cuatro estudiantes cada uno. Dentro de cada grupo se designa un estudiante como A, otro como B, otro como C y otro como D. Luego se realizan en orden las siguientes actividades.

1. Comenten entre los miembros del grupo algunas de las propiedades del triángulo que son evidentes al observar las primeras seis filas mostradas.

2. Es bastante evidente que cada fila inicia y termina con 1. Encuentren un método por medio del cual se puedan determinar las otras entradas de la fila a partir de las entradas de la fila inmediata superior. (*Sugerencia:* En la quinta fila, $6 = 3 + 3$). Luego, el grupo debe obtener las siguientes tres filas del triángulo, y cada miembro tiene que preparar su propia copia de las primeras nueve entradas para consulta posterior.

3. Ahora, cada estudiante del grupo investigará una propiedad particular del triángulo. En algunos casos, será de ayuda una calculadora. Todos los estudiantes deben iniciar el trabajo al mismo tiempo. (Después, siguen los comentarios).

   Estudiante A: Obtenga la suma de las entradas de cada fila. Observe el patrón que surge. Ahora escriba la décima fila del triángulo.

   Estudiante B: Investigue las diferencias sucesivas en las diagonales partiendo de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha. Por ejemplo, en la diagonal que inicia con $1, 2, 3, 4, \ldots$, todas las diferencias sucesivas son iguales a 1; en la diagonal que inicia con $1, 3, 6, \ldots$, las diferencias sucesivas son 2, 3, 4, etcétera. Haga esto en la diagonal que inicia con $1, 6, 21, \ldots$

   Estudiante C: Obtenga los valores de las primeras cinco potencias del número 11, iniciando con 11^0 (recuerde que $11^0 = 1$).

   Estudiante D: Configure nueve filas del triángulo con todas las filas "alineadas a la izquierda", y luego dibuje flechas punteadas como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

   y así sucesivamente. Luego sume a lo largo de las diagonales. Escriba estas sumas de izquierda a derecha.

4. Después de que todos los estudiantes hayan concluido las investigaciones individuales del punto 3, se hacen los comentarios de grupo.

   a) El estudiante A tiene que informar el resultado obtenido en el punto 3, y luego hacer un pronóstico en relación con la suma de las entradas de la décima fila.

   b) El estudiante B tiene que informar las diferencias sucesivas obtenidas en las diagonales. Luego, todos los estudiantes del grupo tienen que investigar las diferencias sucesivas en la diagonal que inicia con $1, 7, 28, \ldots$ (tal vez sea necesario escribir unas cuantas filas más del triángulo).

   c) El estudiante C tiene que informar la relación entre las potencias de 11, y luego determinar el valor de 11^5. ¿Por qué el patrón no continúa aquí?

   d) El estudiante D tiene que informar la secuencia de números obtenida. Luego, como grupo, deberán predecir cuál será la siguiente suma observando el patrón de la secuencia. Comparen su predicción con el cálculo real.

5. Se elige un representante de cada grupo para informar a toda la clase las observaciones realizadas en esta investigación.

6. Encuentre en Internet un artículo del triángulo de Pascal y elabore un informe.

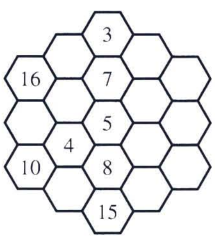
EXAMEN DEL CAPÍTULO 1

En los ejercicios 1 y 2, identifique si el razonamiento implicado es un ejemplo de razonamiento inductivo o deductivo.

1. Carol Britz es representante de ventas de una compañía editorial. Durante los últimos 16 años ha excedido su meta de ventas anual, vendiendo principalmente libros de texto de matemáticas. Por lo tanto, ella también excederá este año su meta anual de ventas.

2. Para los números naturales n, n^2 también es un número natural. 176 es un número natural. Por lo tanto, 176^2 es un número natural.

3. ***Hexágono mágico*** (En un **hexágono mágico** todas las entradas de las columnas y diagonales suman lo mismo). Obtenga la suma constante del hexágono mágico y llene los espacios con números de modo que todas las columnas o diagonales tengan esa suma. (Del calendario mensual de *Mathematics Teacher*, 20 de noviembre de 2007).



4. Use la lista de ecuaciones y el razonamiento inductivo para predecir la siguiente ecuación, y luego verifique su conjetura.

$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 17 = 1{,}111{,}111{,}111{,}111{,}111$$
$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 34 = 2{,}222{,}222{,}222{,}222{,}222$$
$$65{,}359{,}477{,}124{,}183 \times 51 = 3{,}333{,}333{,}333{,}333{,}333$$

5. Use el método de diferencias sucesivas para obtener el término siguiente de la secuencia:

$$3, 11, 31. 69, 131, 223, \ldots$$

6. Obtenga la suma de $1 + 2 + 3 + \cdots + 250$.

7. Considere las siguientes ecuaciones, donde el lado izquierdo de cada una es un número octagonal.

$$1 = 1$$
$$8 = 1 + 7$$
$$21 = 1 + 7 + 13$$
$$40 = 1 + 7 + 13 + 19$$

Use el patrón establecido en los lados derechos para predecir el siguiente número octagonal. ¿Cuál es la siguiente ecuación de la lista?

8. Use el resultado del **ejercicio 7** y el método de las diferencias sucesivas para obtener los primeros ocho números octagonales. Luego divida cada uno entre 4 y registre el residuo. ¿Qué patrón se obtiene?

9. Describa el patrón usado para obtener los términos de la secuencia de Fibonacci.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

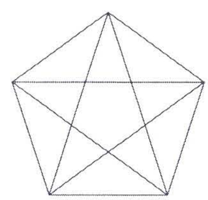
Use estrategias para la solución de problemas para resolver todos los problemas, tomados del calendario mensual de Mathematics Teacher *en la fecha indicada.*

10. ***Construcción de una fracción*** Cada uno de los cuatro dígitos 2, 4, 6 y 9 se coloca en uno de los espacios para formar una fracción. El numerador y el denominador son números enteros de dos dígitos. ¿Cuál es el valor más pequeño de todas las fracciones comunes que se pueden formar? Exprese su respuesta como una fracción. (17 de noviembre de 2004).

$$\frac{\square\square}{\square\square}$$

11. ***Dígito de las unidades de una potencia de 9*** ¿Cuál es el dígito de las unidades en la representación decimal de 9^{1997}? (27 de enero de 1997).

12. ***Conteo de los triángulos del rompecabezas*** ¿Cuántos triángulos hay en esta figura? (6 de enero de 2000).



13. ***Haga una igualdad*** Considere lo siguiente:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 0 = 100.$$

Dejando todos los números en el orden que se presentan, inserte signos de suma y resta en la expresión para obtener una ecuación verdadera. (23 de marzo de 2008).

14. ***Pérdida de estatura*** El doctor Small mide 36 pulgadas de estatura, y la señora Tall mide 96 pulgadas de estatura. Si el doctor Small pierde 2 pulgadas de estatura por año, y la señora Tall crece $\frac{2}{3}$ de pulgada por año, ¿cuánto medirá esta última cuando el doctor Small desaparezca por completo? (2 de noviembre de 2007).

15. ***Dígito de las unidades en una suma*** Obtenga el dígito de las unidades del número decimal que representa el número $11^{11} + 14^{14} + 16^{16}$. (14 de febrero de 1994).

16. Con base en sus conocimientos básicos de aritmética, describa el patrón que se observa cuando se efectúan las siguientes operaciones:

$$9 \times 1, \quad 9 \times 2, \quad 9 \times 3, \ldots, 9 \times 9.$$

(*Sugerencia:* Sume los dígitos de las respuestas. ¿Qué observa?).

Use su calculadora para resolver cada una de las siguientes expresiones. Incluya todos los decimales que despliegue la calculadora.

17. $\sqrt{98.16}$

18. 3.25^3

19. ***Canastas en basquetbol*** Durante la temporada 2008-2009 de la NCAA femenil de basquetbol, Destini Hughes de LSU anotó 28 de sus 96 intentos de tiro de campo. Esto significa que por cada 10 intentos, encestó aproximadamente ________.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

20. ***Tasa de desempleo*** La gráfica lineal muestra la tasa total de desempleo en Estados Unidos de la fuerza de trabajo civil de 1998 a 2005.

Fuente: Departamento del Trabajo de Estados Unidos.

a) ¿Entre qué pares de años consecutivos disminuyó la tasa de desempleo?

b) ¿Cuál fue la tendencia general en la tasa de desempleo entre 2000 y 2003?

c) Estime la tasa total de desempleo en 2003 y 2004. ¿Aproximadamente cuánto disminuyó la tasa de desempleo entre 2003 y 2004?