

CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

2



En la película *I.Q.*, Meg Ryan interpreta a Catherine Boyd, la sobrina brillante de Albert Einstein, quien se siente atraída por el obrero Ed Walters (Tim Robbins). Ed simula ser un físico.

ED: Creo que tu tío quiere que bailemos.

CATHERINE: Oh, no, no seas trivial, Ed. No puedes llegar de ahí hasta aquí.

ED: ¿Por qué no?

CATHERINE: No me digas que un famoso y brillante científico como tú no conoce la paradoja de Zenón.

ED: Recuérdamela.

CATHERINE: No puedes llegar aquí porque siempre tienes que cubrir la mitad de la distancia restante entre tú y yo. Yo tengo que cubrir la mitad también. Entonces, mira, yo todavía tengo otra mitad de ese recorrido, así que cubro esa mitad... y como existen mitades infinitas restantes, nunca puedo llegar allí.

ED (tomándola en sus brazos, comienzan a bailar): Entonces, ¿qué pasó?

CATHERINE: No lo sé.

2.1 Símbolos y terminología

2.2 Diagramas de Venn y subconjuntos

2.3 Operaciones con conjuntos y productos cartesianos

2.4 Encuestas y números cardinales

Extensión Conjuntos infinitos y sus cardinalidades

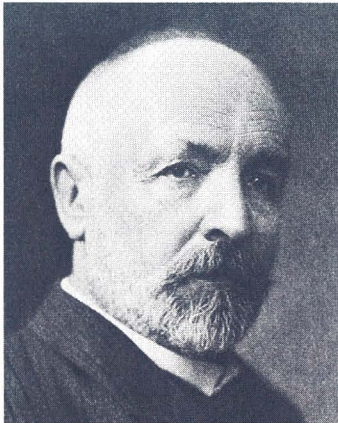
Investigación colaborativa Determinación del número de estudiantes en su clase

Examen del capítulo 2

Antes del siglo xx, algunas ideas de la *teoría de conjuntos* se consideraban *paradojas* (opiniones equivocadas). La *paradoja de Zenón*, como la describió Catherine y que se presenta en los **ejercicios 51 y 52** de la **Extensión**, ha estado presente de varias formas por miles de años.

2.1 SÍMBOLOS Y TERMINOLOGÍA

Definiciones de conjuntos • Conjuntos de números y cardinalidad • Conjuntos finitos e infinitos
• Igualdad de conjuntos



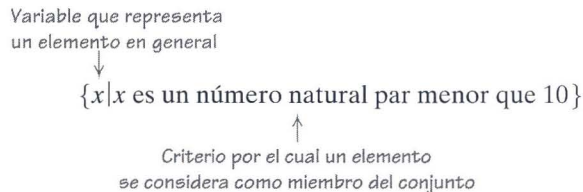
Las ideas básicas de la teoría de conjuntos fueron desarrolladas por el matemático alemán **Georg Cantor** (1845-1918) en el año 1875 aproximadamente. Cantor creó un nuevo campo teórico y, al mismo tiempo, continuó el largo debate sobre el infinito, que inició en tiempos antiguos. Desarrolló el conteo de correspondencia uno a uno para determinar cuántos objetos están contenidos en un conjunto. Los conjuntos infinitos se diferencian de los conjuntos finitos porque no siguen la conocida ley de que un entero es mayor que cualquiera de sus partes.

Definiciones de conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos. Los objetos que pertenecen al conjunto se llaman **elementos**, o **miembros**, del conjunto. Los conjuntos se definen usando cualquiera de los tres métodos siguientes: 1. *descripción con palabras*, 2. *método de listado*, y 3. *notación de comprensión*.

El conjunto de números naturales pares menores que 10	Descripción con palabras
$\{2, 4, 6, 8\}$	Método de listado
$\{x x \text{ es un número natural par menor que } 10\}$	Notación de comprensión

La notación de comprensión de arriba se lee como “el conjunto de todas las x donde x es un número natural par menor que 10”. La notación de comprensión utiliza la idea algebraica de *variable*. (Se podría utilizar cualquier símbolo, pero, al igual que en otras aplicaciones algebraicas, la letra x es una selección común).



A los conjuntos normalmente se les asigna un nombre (usualmente con letras mayúsculas), como E para el conjunto de todas las letras del abecedario inglés.

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

La notación de listado con frecuencia se abrevia estableciendo el patrón de elementos incluidos y utilizando puntos suspensivos para indicar la continuación del patrón.

$$E = \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\} \quad \text{o} \quad E = \{a, b, c, d, e, \dots, z\}.$$

Un conjunto que no contiene elementos se llama **conjunto vacío**, o **conjunto nulo**. El símbolo \emptyset se usa para denotar un conjunto vacío, de modo que \emptyset y $\{\}$ tienen el mismo significado. *No* identificamos el conjunto vacío como $\{\emptyset\}$ porque esta notación representaría a un conjunto con un elemento (ese elemento es el conjunto vacío).

EJEMPLO 1 Lista de los elementos de conjuntos

Proporcione una lista completa de los elementos de cada conjunto.

- a) El conjunto de números naturales entre 6 y 13
- b) $\{5, 6, 7, \dots, 13\}$
- c) $\{x|x \text{ es un número cardinal entre } 6 \text{ y } 7\}$

SOLUCIÓN

- a) El conjunto se denota como $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. (Observe que la palabra *entre* excluye los valores de los extremos).

- b) Este conjunto inicia con el elemento 5, luego 6, luego 7, etcétera; cada elemento se obtiene sumando 1 al elemento anterior de la lista. Este patrón se detiene en 13, de manera que la lista completa es $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.
- c) No hay números naturales entre 6 y 7, de modo que este es un conjunto vacío $\{\}$ o \emptyset . ■■■

Para que un conjunto sea útil, debe estar bien definido. Por ejemplo, el conjunto anterior E , que incluye las letras del abecedario inglés, está bien definido. Si consideramos la letra q , sabemos que q es un elemento de E . Si consideramos la letra griega θ (theta), sabemos que no es un elemento del conjunto E .

Por otro lado, si consideramos el conjunto C de todos los buenos cantantes, y a una cantante en particular, Raeanna, no es posible decir si

Raeanna es un elemento de C o Raeanna *no* es un elemento de C .

El problema es la palabra “buenos”; ¿qué significa exactamente bueno? Como no podemos determinar si un cantante determinado pertenece al conjunto C , el conjunto C no está bien definido.

La letra q es un elemento del conjunto E , donde E es el conjunto de todas las letras del abecedario inglés. Para indicar esto, se usa el símbolo \in .

$$q \in E \quad \text{Esto se lee como "q pertenece al conjunto E".}$$

La letra θ no es un elemento del conjunto E . Para indicar esto, se usa \in con una marca diagonal.

$$\theta \notin E \quad \text{Esto se lee como "u no pertenece al conjunto E".}$$

EJEMPLO 2 Uso del símbolo \in

Determine si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

$$a) 3 \in \{1, 2, 5, 9, 13\} \quad b) 0 \in \{0, 1, 2, 3\} \quad c) \frac{1}{5} \notin \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \right\}$$

SOLUCIÓN

- a) Como 3 *no* es un elemento del conjunto $\{1, 2, 5, 9, 13\}$, el enunciado es *falso*.
- b) Como 0 es claramente un elemento del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, el enunciado es *verdadero*.
- c) Este enunciado dice que $\frac{1}{5}$ no es un elemento del conjunto $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \right\}$, lo cual es *verdadero*. ■■■

Conjuntos de números y cardinalidad

A continuación se resumen categorías importantes de números.

Conjuntos de números

Números naturales o cardinales $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Números enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Enteros $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Números racionales $\left\{ \frac{p}{q} \mid p \text{ y } q \text{ son enteros, y } q \neq 0 \right\}$

(Ejemplos: $\frac{3}{5}$, $-\frac{7}{9}$, 5, 0. Todos los números racionales se pueden escribir con un número decimal exacto, como 0.25 o un número decimal periódico, como 0.666...).

Números reales $\{x \mid x \text{ es un número que se puede expresar como un decimal}\}$.

Números irracionales $\{x \mid x \text{ es un número real y } x \text{ no se puede expresar como un cociente de números enteros}\}$.

(Ejemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π . Las representaciones decimales de los números irracionales no tienen terminaciones decimales exactas ni periódicas).

El número de elementos en un conjunto se conoce como **número cardinal**, o **cardinalidad**, del conjunto. El símbolo

$$n(A), \text{ que se lee "n de A",}$$

representa el número cardinal del conjunto A . Si hay elementos repetidos en la lista de un conjunto, no se deben contar más de una vez cuando se determina el número cardinal de un conjunto.

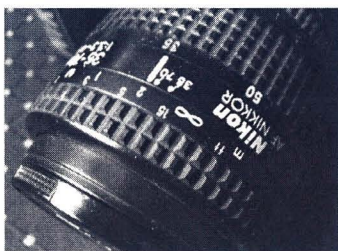
EJEMPLO 3 Obtención de números cardinales

Obtenga el número cardinal de todos los conjuntos.

- a) $K = \{2, 4, 8, 16\}$ b) $M = \{0\}$ c) $B = \{1, 1, 2, 2, 3\}$
 d) $R = \{4, 5, \dots, 12, 13\}$ e) \emptyset

SOLUCIÓN

- a) El conjunto K contiene cuatro elementos, de manera que el número cardinal del conjunto K es igual a 4, y $n(K) = 4$.
 b) El conjunto M contiene solo un elemento, el 0, de manera que $n(M) = 1$.
 c) Si hay elementos repetidos en la lista de un conjunto, no se deben contar más de una vez cuando se determina el número cardinal del conjunto. El conjunto B solo tiene tres elementos *diferentes*, entonces $n(B) = 3$.
 d) Aun cuando solo se listan cuatro elementos, los puntos suspensivos indican que existen otros elementos en el conjunto. Si los contamos todos, vemos que existen 10 elementos, de modo que $n(R) = 10$.
 e) El conjunto vacío, \emptyset , no contiene elementos, entonces $n(\emptyset) = 0$. ■■■



En los lentes de acercamiento de una cámara fotográfica se muestra el **símbolo de infinito**, ∞ , definido en este caso como cualquier distancia mayor de 1000 veces el alcance de enfoque de los lentes.

El símbolo fue inventado por el matemático John Wallis en 1655. Wallis usó $1/\infty$ para representar una cantidad infinitamente pequeña.

Conjuntos finitos e infinitos

Si el número cardinal de un conjunto es un número entero no negativo particular (0 o un número cardinal), como en los incisos del **ejemplo 3**, decimos que se trata de un **conjunto finito**. Con tiempo suficiente, podemos terminar de contar todos los elementos de cualquier conjunto finito y obtener su número cardinal.

Algunos conjuntos, sin embargo, son tan largos que nunca se puede terminar el proceso de conteo. Los números cardinales en sí mismos forman este tipo de conjunto. Siempre que un conjunto es tan grande que no se puede obtener su número cardinal entre los números enteros no negativos, decimos que se trata de un **conjunto infinito**.

EJEMPLO 4 Identificación de un conjunto infinito

Identifique todos los números cardinales nones mediante los tres métodos comunes de la notación de conjuntos.

SOLUCIÓN

El conjunto de todos los números cardinales nones Descripción con palabras
 $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ Método de listado
 $\{x \mid x \text{ es un número cardinal non}\}$ Notación de comprensión ■■■

Igualdad de conjuntos

Igualación de conjuntos

Al hacer el conjunto A **igual** al conjunto B se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. Cada elemento de A es un elemento de B , y
2. Cada elemento de B es un elemento de A .

Dos conjuntos son iguales si contienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden.

$$\{a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\} \quad \text{Ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.}$$

La repetición de elementos en la lista de un conjunto no agrega nuevos elementos.

$$\{1, 0, 1, 2, 3, 3\} = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{Ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos.}$$

EJEMPLO 5 Identificación de la igualdad de dos conjuntos

¿Son iguales los conjuntos $\{-4, 3, 2, 5\}$ y $\{-4, 0, 3, 2, 5\}$?

SOLUCIÓN

Cada elemento del primer conjunto es un elemento del segundo conjunto. Sin embargo, 0 es un elemento del segundo conjunto, pero no del primero. Los conjuntos no contienen exactamente los mismos elementos, de modo que no son iguales.

$$\{-4, 3, 2, 5\} \neq \{-4, 0, 3, 2, 5\}$$

EJEMPLO 6 Identificación de la igualdad de dos conjuntos

Determine si cada enunciado es *verdadero* o *falso*.

- a) $\{3\} = \{x \mid x \text{ es un número cardinal entre 1 y 5}\}$
 b) $\{x \mid x \text{ es un número natural negativo}\} = \{y \mid y \text{ es un número racional e irracional a la vez}\}$

SOLUCIÓN

- a) El conjunto de la derecha contiene *todos* los números cardinales entre 1 y 5, a saber, 2, 3 y 4, mientras que el conjunto de la izquierda *solo* contiene el número 3. Como los conjuntos no contienen exactamente los mismos elementos, no son iguales. El enunciado es *falso*.
 b) Todos los números naturales son positivos, de modo que el conjunto del lado izquierdo es un conjunto vacío. Por definición, si un número es racional, no puede ser irracional, de manera que el conjunto de la derecha también es un conjunto vacío. Como cada conjunto es un conjunto vacío, los conjuntos son iguales. El enunciado es *verdadero*.

2.1 EJERCICIOS

Asocie cada conjunto de la columna I con la descripción apropiada de la columna II.

I

1. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
2. $\{x \mid x \text{ es un número entero par mayor que 4 y menor que 6}\}$
3. $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$
4. $\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$
5. $\{2, 4, 8, 16, 32\}$
6. $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
7. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
8. $\{2, 4, 6, 8\}$

II

- A. El conjunto de todos los números enteros pares.
- B. El conjunto de las cinco potencias menores positivas enteras de 2.
- C. El conjunto de números enteros positivos pares menores que 10.
- D. El conjunto de todos los números enteros nones.
- E. El conjunto de todos los números enteros negativos.
- F. El conjunto de números enteros positivos nones menores que 10.
- G. \emptyset
- H. El conjunto de los cinco múltiplos mínimos de 2 que sean números enteros positivos.

Liste todos los elementos de cada conjunto. Use el método de notación de conjuntos (comprensión) y el método de listado para describir el conjunto.

9. El conjunto de todos los números cardinales menores o iguales que 6.
10. El conjunto de todos los números enteros no negativos mayores que 8 y menores que 18.
11. El conjunto de todos los números enteros no negativos no mayores que 4.
12. El conjunto de todos los números cardinales entre 4 y 14.
13. $\{6, 7, 8, \dots, 14\}$
14. $\{3, 6, 9, 12, \dots, 30\}$
15. $\{-15, -13, -11, \dots, -1\}$
16. $\{-4, -3, -2, \dots, 4\}$
17. $\{2, 4, 8, \dots, 256\}$
18. $\{90, 87, 84, \dots, 69\}$
19. $\{x|x \text{ es un número entero no negativo par menor que } 11\}$
20. $\{x|x \text{ es un número entero non entre } -8 \text{ y } 7\}$

Identifique cada conjunto por el método de listado. Puede haber más de una respuesta correcta.

21. El conjunto de todos los números cardinales mayores que 20.
22. El conjunto de todos los números enteros entre -200 y 500 .
23. El conjunto de los Grandes Lagos.
24. El conjunto de los presidentes estadounidenses después de Richard Nixon y antes de Barack Obama.
25. $\{x|x \text{ es un múltiplo positivo de } 5\}$
26. $\{x|x \text{ es un múltiplo negativo de } 6\}$
27. $\{x|x \text{ es el recíproco de un número natural}\}$
28. $\{x|x \text{ es un número entero positivo potencia de } 4\}$

Identifique cada conjunto con la notación de comprensión, usando x como la variable. Puede haber más de una respuesta correcta.

29. El conjunto de los números racionales.
30. El conjunto de los números naturales pares.
31. $\{1, 3, 5, \dots, 75\}$
32. $\{35, 40, 45, \dots, 95\}$

Describa con palabras cada conjunto. Puede haber más de una respuesta.

33. $\{-9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9\}$

$$34. \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

35. $\{\text{Alabama, Alaska, Arizona, } \dots, \text{Wisconsin, Wyoming}\}$
36. $\{\text{Alaska, California, Hawaii, Oregon, Washington}\}$

Identifique cada conjunto como finito o infinito.

37. $\{2, 4, 6, \dots, 932\}$
38. $\{6, 12, 18\}$

$$39. \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

40. $\{\dots, -100, -80, -60, -40, \dots\}$
41. $\{x|x \text{ es un número natural mayor que } 50\}$
42. $\{x|x \text{ es un número natural menor que } 50\}$
43. $\{x|x \text{ es un número racional}\}$
44. $\{x|x \text{ es un número racional entre } 0 \text{ y } 1\}$

Obtenga $n(A)$ para cada conjunto.

45. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
46. $A = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$
47. $A = \{2, 4, 6, \dots, 1000\}$
48. $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 3000\}$
49. $A = \{a, b, c, \dots, z\}$
50. $A = \{x|x \text{ es una vocal en el abecedario inglés}\}$
51. $A = \text{el conjunto de números enteros entre } -20 \text{ y } 20.$
52. $A = \text{el conjunto de escaños autorizados en el Senado estadounidense.}$
53. $A = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots, \frac{27}{29}, \frac{28}{30}\right\}$
54. $A = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}\right\}$

55. Aun cuando x es una consonante, ¿por qué se dice “ x es una vocal en el abecedario inglés” en el **ejercicio 50**?

56. Explique cómo se puede resolver el **ejercicio 53** sin listar y contar todos los elementos.

Identifique cada conjunto como bien definido o no bien definido.

57. $\{x|x \text{ es un número real}\}$
58. $\{x|x \text{ es un buen atleta}\}$
59. $\{x|x \text{ es un curso difícil}\}$
60. $\{x|x \text{ es un número cardinal menor que } 2\}$

Llene cada espacio con \in o \notin para hacer verdadero cada enunciado.

61. $5 \underline{\hspace{1cm}} \{2, 4, 5, 7\}$ 62. $-4 \underline{\hspace{1cm}} \{4, 7, 8, 12\}$
 63. $-12 \underline{\hspace{1cm}} \{3, 8, 12, 18\}$ 64. $0 \underline{\hspace{1cm}} \{-2, 0, 5, 9\}$
 65. $\{3\} \underline{\hspace{1cm}} \{2, 3, 4, 6\}$ 66. $\{6\} \underline{\hspace{1cm}} \{5 + 1, 6 + 1\}$
 67. $8 \underline{\hspace{1cm}} \{11 - 2, 10 - 2, 9 - 2, 8 - 2\}$

68. El enunciado $3 \in \{9 - 6, 8 - 6, 7 - 6\}$ es verdadero aun cuando el número 3 no aparece en el conjunto. Explique por qué.

Indique si es verdadero o falso cada uno de los siguientes enunciados.

69. $3 \in \{2, 5, 6, 8\}$ 70. $6 \in \{-2, 5, 8, 9\}$
 71. $b \in \{h, c, d, a, b\}$ 72. $m \in \{l, m, n, o, p\}$
 73. $9 \notin \{6, 3, 4, 8\}$ 74. $2 \notin \{7, 6, 5, 4\}$
 75. $\{k, c, r, a\} = \{k, c, a, r\}$
 76. $\{e, h, a, n\} = \{a, h, e, n\}$ 77. $\{5, 8, 9\} = \{5, 8, 9, 0\}$
 78. $\{3, 7, 12, 14\} = \{3, 7, 12, 14, 0\}$
 79. $\{4\} \in \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ 80. $4 \in \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$
 81. $\{x|x \text{ es un número natural menor que } 3\} = \{1, 2\}$
 82. $\{x|x \text{ es un número natural mayor que } 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$

Indique si es verdadero o falso cada uno de los siguientes enunciados.

$$\text{Sea } A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, B = \{2, 4, 8, 10\}, \\ \text{y } C = \{4, 10, 12\}.$$

83. $4 \in A$ 84. $8 \in B$
 85. $4 \notin C$ 86. $8 \notin B$
 87. Cada elemento de C también es un elemento de A .
 88. Cada elemento de C también es un elemento de B .
 89. A la mente humana le gusta crear colecciones. ¿Por qué supone que es así? En su explicación considere una o más "colecciones" particulares, ya sean matemáticas o de cualquier otra índole.

90. Explique la diferencia entre un conjunto bien definido y uno que no está bien definido. Dé ejemplos y use los términos presentados en esta sección.

Dos conjuntos son **iguales** si contienen elementos idénticos. Sin embargo, dos conjuntos son **equivalentes** si contienen el mismo número de elementos (pero no necesariamente los mismos elementos). Dé un ejemplo para cada condición o explique por qué no es posible.

91. Dos conjuntos que no son iguales ni equivalentes.
 92. Dos conjuntos que son iguales, pero no equivalentes.

93. Dos conjuntos que son equivalentes, pero no iguales.
 94. Dos conjuntos que son iguales y equivalentes.
 95. **Actores sobrevalorados** Una investigación de la revista *Forbes* de un periodo reciente de cinco años consideraba a 100 actores de Hollywood. La tabla muestra los 10 "peores actores", en términos de ganancias generadas por sus películas, por cada dólar que el actor ganó.

ACTORES MÁS SOBREVALUADOS		
Lugar	Actor	Ganancias por dólar que ganó el actor
1.	Will Ferrell	\$3.29
2.	Ewan McGregor	\$3.75
3.	Billy Bob Thornton	\$4.00
4.	Eddie Murphy	\$4.43
5.	Ice Cube	\$4.77
6.	Tom Cruise	\$7.18
7.	Drew Barrymore	\$7.43
8.	Leonardo DiCaprio	\$7.52
9.	Samuel L. Jackson	\$8.59
10.	Jim Carrey	\$8.62

Fuente: Forbes.com

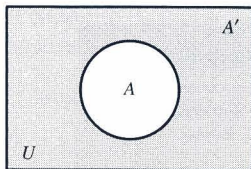
- a) Liste el conjunto de actores con una ganancia de por lo menos \$7.40.
 b) Liste el conjunto de actores con una ganancia de cuando mucho \$3.75.
 96. **Quema de calorías** A Candice Cotton le gustan los algodones azucarados, cada uno de los cuales contiene 220 calorías. Para quemar las calorías no deseadas, Candice participa en las actividades indicadas abajo, en intervalos de 1 hora, y nunca repite la misma actividad en un día.

Actividad	Símbolo	Calorías quemadas por hora
Voleibol	v	160
Golf	g	260
Canotaje	c	340
Natación	s	410
Correr	r	680

- a) Los lunes, Candice solo tiene tiempo para dos horas de actividades. Liste todos los posibles conjuntos de actividades que le ayudarían a quemar, por lo menos, el número de calorías de tres algodones de azúcar.
 b) Suponga que Candice tiene tres horas para las actividades del miércoles. Liste todos los posibles conjuntos de actividades que le ayudarían a quemar, por lo menos, el número de calorías de cinco algodones de azúcar.
 c) Candice tiene cuatro horas para las actividades del sábado. Liste todos los posibles conjuntos de actividades que le ayudarían a quemar, por lo menos, el número de calorías de siete algodones de azúcar.

2.2 DIAGRAMAS DE VENN Y SUBCONJUNTOS

Diagramas de Venn • Complemento de un conjunto • Subconjuntos de un conjunto • Subconjuntos propios
• Conteo de subconjuntos



La región total limitada por el rectángulo representa el conjunto universal U , mientras que la parte limitada por el círculo representa el conjunto A .

Figura 1

Diagramas de Venn

En el enunciado de un problema existe un **universo de discurso** implícito o explícito. El universo de discurso incluye todos los objetos que se someten a análisis en un momento determinado. Por ejemplo, en el estudio de las reacciones a la propuesta de que en cierto plantel se eleva la edad mínima de los individuos a quienes se les puede vender cerveza, el universo de discurso podrían ser todos los estudiantes de la escuela, los miembros cercanos del público, los miembros del consejo de administración de la escuela, o quizá todos estos grupos de personas.

En teoría de conjuntos, el universo de discurso se llama **conjunto universal**, y se representa normalmente con la letra U . El conjunto universal puede cambiar de un problema a otro.

En teoría de conjuntos también se usan comúnmente los **diagramas de Venn**, desarrollados por el estudioso de la lógica John Venn (1834-1923). En estos diagramas, el conjunto universal se representa con un rectángulo, y los conjuntos de interés dentro del conjunto universal se representan con regiones circulares (algunas veces con óvalos u otras formas). Véase la **figura 1**.

Complemento de un conjunto

La región sombreada dentro de U y fuera del círculo en la **figura 1** se identifica como A' (se lee "**A prima**"). Este conjunto, llamado el complemento de A , tiene todos los elementos contenidos en U , pero que no están contenidos en A .

Complemento de un conjunto

Para cualquier conjunto A dentro del conjunto universal U , el **complemento** de A , identificado como A' , es el conjunto de elementos de U que no son elementos de A . Es decir,

$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$

EJEMPLO 1 Obtención de complementos

Obtenga el complemento de cada conjunto.

$$\text{Sea } U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, M = \{a, b, e, f\} \text{ y } N = \{b, d, e, g, h\}.$$

- a) M' b) N'

SOLUCIÓN

- a) Hagamos que el conjunto M' contenga los elementos del conjunto U que *no* están en el conjunto M . Como el conjunto M contiene los elementos a, b, e y f , estos elementos se excluyen del conjunto M' .

$$M' = \{c, d, g, h\}$$

- b) Hagamos que el conjunto N' contenga los elementos del conjunto U que *no* están en el conjunto N , de manera que $N' = \{a, c, f\}$. ■■■

Considere el complemento U' del conjunto universal. El conjunto U' se obtiene seleccionando todos los elementos de U que no pertenecen a U . No existen tales elementos, de modo que no puede haber elementos en U' . Esto significa que, para cualquier conjunto universal U ,

$$U' = \emptyset.$$

Ahora considere el complemento \emptyset' del conjunto vacío. Como $\emptyset' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin \emptyset\}$ y el conjunto \emptyset no contiene elementos, todos los miembros del conjunto universal U satisfacen esta descripción. Por lo tanto, para cualquier conjunto universal U ,

$$\emptyset' = U.$$

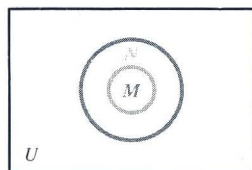


Figura 2

Subconjuntos de un conjunto

Suponga que tenemos el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mientras que $A = \{1, 2, 3\}$. Cada elemento del conjunto A también es un elemento del conjunto U . Debido a esto, el conjunto A se conoce como *subconjunto* del conjunto U , y se escribe como

$$A \subseteq U.$$

(“ A no es un subconjunto del conjunto U ” se representaría como $A \not\subseteq U$).

Un diagrama de Venn que muestra que el conjunto M es un subconjunto del conjunto N se presenta en la **figura 2**.

Subconjunto de un conjunto

El conjunto A es un **subconjunto** del conjunto B si cada elemento de A también es un elemento de B . En símbolos, esto se escribe como $A \subseteq B$.

EJEMPLO 2 Determinación de que un conjunto es subconjunto de otro

Escriba \subseteq o $\not\subseteq$ en cada espacio para que el enunciado sea verdadero.

- a) $\{3, 4, 5, 6\}$ _____ $\{3, 4, 5, 6, 8\}$ b) $\{1, 2, 6\}$ _____ $\{2, 4, 6, 8\}$
 c) $\{5, 6, 7, 8\}$ _____ $\{5, 6, 7, 8\}$

SOLUCIÓN

- a) Como cada elemento de $\{3, 4, 5, 6\}$ también es un elemento de $\{3, 4, 5, 6, 8\}$, el primer conjunto es un subconjunto del segundo, de modo que se anota \subseteq en el espacio.

$$\{3, 4, 5, 6\} \subseteq \{3, 4, 5, 6, 8\}$$

- b) $\{1, 2, 6\} \not\subseteq \{2, 4, 6, 8\}$ 1 no pertenece a $\{2, 4, 6, 8\}$.

c) $\{5, 6, 7, 8\} \subseteq \{5, 6, 7, 8\}$ ■■■

Como sugiere el **ejemplo 2c)**, cada conjunto es un subconjunto de sí mismo.

$$B \subseteq B, \text{ para cualquier conjunto } B.$$

Ahora se puede formalizar el enunciado de igualdad de conjuntos de la **sección 2.1**.

Igualdad de conjuntos (definición alternativa)

Suponga que tenemos los conjuntos A y B . Entonces $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ son verdaderos.

Subconjuntos propios

Suponga que tenemos los siguientes conjuntos:

$$B = \{5, 6, 7, 8\} \text{ y } A = \{6, 7\}$$

A es un subconjunto de B , pero A no es todo B . Hay por lo menos un elemento en B que no está en A . (En realidad, existen en este caso dos elementos, 5 y 8). En esta situación, A se conoce como *subconjunto propio* de B . Para indicar que A es un subconjunto propio de B , se escribe:

$$A \subset B.$$

Subconjunto propio de un conjunto

El conjunto A es un **subconjunto propio** del conjunto B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. En símbolos, esto se escribe como $A \subset B$.

Observe la similitud de los símbolos de subconjuntos, \subset y \subseteq , con los símbolos de desigualdad del álgebra, $<$ y \leq .

EJEMPLO 3 Identificación de las relaciones entre un subconjunto y el subconjunto propio

Determine si se pueden colocar \subset , \subseteq o ambos en cada espacio en blanco para hacer verdadero el enunciado.

- a) $\{5, 6, 7\}$ _____ $\{5, 6, 7, 8\}$ b) $\{a, b, c\}$ _____ $\{a, b, c\}$

SOLUCIÓN

- a) Cada elemento de $\{5, 6, 7\}$ está contenido en $\{5, 6, 7, 8\}$, de modo que se puede colocar \subseteq en el espacio. Por otro lado, el elemento 8 pertenece a $\{5, 6, 7, 8\}$, pero no a $\{5, 6, 7\}$, por lo que $\{5, 6, 7\}$ es un subconjunto propio de $\{5, 6, 7, 8\}$. Coloque \subset en el espacio.
- b) El conjunto $\{a, b, c\}$ es un subconjunto de $\{a, b, c\}$. Como los dos conjuntos son iguales, $\{a, b, c\}$ no es un subconjunto propio de $\{a, b, c\}$. Solo se puede colocar \subseteq en el espacio. ■■■

El conjunto A es un subconjunto del conjunto B si cada elemento del conjunto A también es un elemento del conjunto B . Esta definición se puede formular de otra manera diciendo que el conjunto A es un subconjunto del conjunto B si no hay elementos de A que no sean elementos de B . Esta segunda definición muestra que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.

$$\emptyset \subseteq B, \text{ para cualquier conjunto } B.$$

Esto es verdadero porque no es posible obtener algún elemento de \emptyset que no esté en B . (No hay elementos en \emptyset). El conjunto vacío \emptyset es un subconjunto propio de todos los conjuntos, excepto de sí mismo.

$$\emptyset \subset B \text{ si } B \text{ es cualquier conjunto diferente de } \emptyset.$$

Todos los conjuntos (excepto \emptyset) tienen por lo menos dos subconjuntos, \emptyset y el conjunto mismo.

EJEMPLO 4 Lista de todos los subconjuntos de un conjunto

Obtenga todos los subconjuntos posibles de cada conjunto.

- a) $\{7, 8\}$ b) $\{a, b, c\}$

SOLUCIÓN

- a) Por ensayo y error vemos que el conjunto $\{7, 8\}$ tiene cuatro subconjuntos: \emptyset , $\{7\}$, $\{8\}$, $\{7, 8\}$.

- b) Aquí, el ensayo y error nos muestra ocho subconjuntos para $\{a, b, c\}$:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Conteo de subconjuntos

En el ejemplo 4, los subconjuntos de $\{7, 8\}$ y los subconjuntos de $\{a, b, c\}$ se obtuvieron por ensayo y error. Un método alternativo implica el dibujo de un **diagrama de árbol**, una manera sistemática de listar todos los subconjuntos de un conjunto determinado. Véase la figura 3.

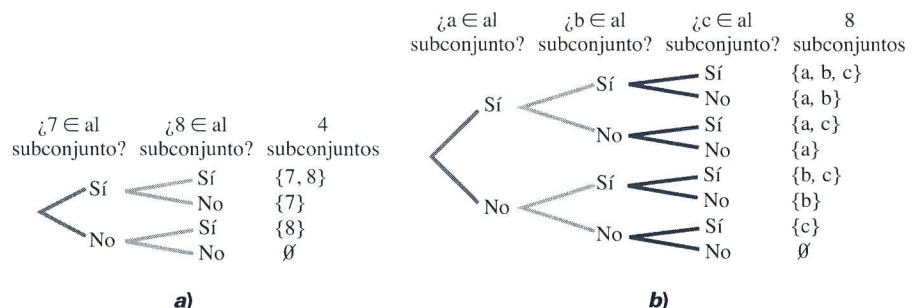


Figura 3

Potencias de 2

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$
$2^{11} = 2048$
$2^{12} = 4096$
$2^{15} = 32,768$
$2^{20} = 1,048,576$
$2^{25} = 33,554,432$
$2^{30} = 1,073,741,824$

En el **ejemplo 4** determinamos el número de subconjuntos de un conjunto particular haciendo una lista de todos los subconjuntos y contándolos. El método del diagrama de árbol también produce una lista de todos los subconjuntos posibles. Para obtener una fórmula que permita calcular el número de subconjuntos, usamos razonamiento inductivo. Es decir, observamos casos particulares para intentar descubrir un patrón general.

Se inicia con el conjunto que contiene el número mínimo posible de elementos: el conjunto vacío. Este conjunto, \emptyset , solo tiene un subconjunto, \emptyset mismo. En seguida, el conjunto con un elemento tiene solo dos subconjuntos, él mismo y \emptyset . Estos hechos, junto con los obtenidos en el **ejemplo 4** para conjuntos con dos y tres elementos, se resumen como sigue:

Número de elementos	0	1	2	3
Número de subconjuntos	1	2	4	8

Esta tabla sugiere que conforme el número de elementos del conjunto se incrementa en uno, el número de subconjuntos se duplica. Si es así, entonces el número de subconjuntos en cada caso podría ser una potencia de 2. Como cada número de la segunda fila de la tabla es claramente una potencia de 2, se agrega esta información a la tabla.

Número de elementos	0	1	2	3
Número de subconjuntos	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$

Esta tabla indica que el número de elementos en cada caso es el mismo que el exponente de la base 2. El razonamiento inductivo proporciona la siguiente generalización.

Número de subconjuntos

El número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n .

Como el valor 2^n incluye al conjunto mismo, debemos restar 1 de este valor para obtener el número de subconjuntos propios de un conjunto que contiene n elementos.

Número de subconjuntos propios

El número de subconjuntos propios de un conjunto con n elementos es $2^n - 1$.

Como se vio en el **capítulo 1**, aun cuando el razonamiento inductivo es una buena manera de *descubrir* principios o hacer *conjeturas*, no ofrece una prueba de que la conjetura es verdadera en general. Las dos fórmulas anteriores son verdaderas, por observación, para $n = 0, 1, 2$ o 3 . (Para una prueba general, véase el **ejercicio 69** al final de esta sección).

EJEMPLO 5

Obtención del número de subconjuntos y de subconjuntos propios

Obtenga los números de subconjuntos y los subconjuntos propios de cada conjunto.

- a)** $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ **b)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14\}$

SOLUCIÓN

- a)** Este conjunto tiene 5 elementos y $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ subconjuntos. De estos, $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ son subconjuntos propios.
- b)** Este conjunto tiene 8 elementos. Hay $2^8 = 256$ subconjuntos y 255 subconjuntos propios. ■■■

2.2 EJERCICIOS

Asocie cada conjunto o conjuntos de la columna I con la descripción adecuada de la columna II.

- | I | II |
|--|---|
| 1. $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}, \emptyset$ | A. Los subconjuntos propios de $\{p, q\}$ |
| 2. $\{p\}, \{q\}, \emptyset$ | B. El complemento de $\{c, d\}$, si $U = \{a, b, c, d\}$ |
| 3. $\{a, b\}$ | C. El complemento de U |
| 4. \emptyset | D. Los subconjuntos de $\{p, q\}$ |

Inserte \subseteq o $\not\subseteq$ en los espacios, de modo que el enunciado resultante sea verdadero.

- $\{-2, 0, 2\} \quad ____ \quad \{-2, -1, 1, 2\}$
- $\{M, W, F\} \quad ____ \quad \{S, M, T, W, Th\}$
- $\{2, 5\} \quad ____ \quad \{0, 1, 5, 3, 7, 2\}$
- $\{a, n, d\} \quad ____ \quad \{r, a, n, d, y\}$
- $\emptyset \quad ____ \quad \{a, b, c, d, e\}$
- $\emptyset \quad ____ \quad \emptyset$
- $\{-5, 2, 9\} \quad ____ \quad \{x \mid x \text{ es un número entero impar}\}$
- $\left\{1, 2, \frac{9}{3}\right\} \quad ____ \quad \text{el conjunto de números racionales}$

Determine si es posible colocar \subset , \subseteq , ambos o ninguno de esos símbolos en los espacios para hacer verdadero el enunciado.

- $\{P, Q, R\} \quad ____ \quad \{P, Q, R, S\}$
- $\{\text{rojo, azul, amarillo}\} \quad ____ \quad \{\text{amarillo, azul, rojo}\}$
- $\{9, 1, 7, 3, 5\} \quad ____ \quad \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $\{S, M, T, W, Th\} \quad ____ \quad \{W, E, E, K\}$
- $\emptyset \quad ____ \quad \{0\}$
- $\emptyset \quad ____ \quad \emptyset$
- $\{0, 1, 2, 3\} \quad ____ \quad \{1, 2, 3, 4\}$
- $\left\{\frac{5}{6}, \frac{9}{8}\right\} \quad ____ \quad \left\{\frac{6}{5}, \frac{8}{9}\right\}$

En los ejercicios 21 a 40, indique si cada enunciado es verdadero o falso. U es el conjunto universal.

Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, e\}$,

$B = \{a, b, e, f, g\}$, $C = \{b, f, g\}$, y $D = \{d, e\}$.

21. $A \subset U$

22. $C \not\subseteq U$

23. $D \subseteq B$

24. $D \not\subseteq A$

25. $A \subset B$

26. $B \subseteq C$

27. $\emptyset \not\subseteq A$

28. $\emptyset \subseteq D$

29. $\emptyset \subseteq \emptyset$

30. $D \subset B$

31. $D \not\subseteq B$

32. $A \not\subseteq B$

33. Hay exactamente 6 subconjuntos de C .

34. Hay exactamente 31 subconjuntos de B .

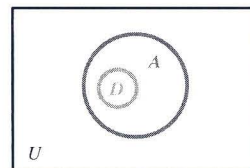
35. Hay exactamente 3 subconjuntos propios de A .

36. Hay exactamente 4 subconjuntos de D .

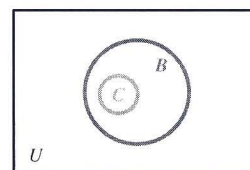
37. Hay exactamente 1 subconjunto de \emptyset .

38. Hay exactamente 128 subconjuntos propios de U .

39. El siguiente diagrama de Venn representa correctamente la relación entre los conjuntos A, D y U .



40. El siguiente diagrama de Venn representa correctamente la relación entre los conjuntos B, C y U .



Obtenga **a)** el número de subconjuntos y **b)** el número de subconjuntos propios de cada conjunto.

41. $\{a, b, c, d, e, f\}$

42. El conjunto de días de la semana

43. $\{x \mid x \text{ es un número entero impar entre } -4 \text{ y } 6\}$

44. $\{x \mid x \text{ es un número entero no negativo impar menor que } 4\}$

Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y obtenga el complemento de cada conjunto.

45. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

46. $\{2, 5, 9, 10\}$

47. $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

48. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

49. U

50. \emptyset

Vacaciones en California Terry McGinnis está planeando un viaje con sus dos hijos a California. Al evaluar sus opciones en relación con viajar en avión o conducir de su casa en Iowa, incluyó las siguientes características.

Volar a California	Conducir a California
Costo más alto	Costo más bajo
Didáctico	Didáctico
Más tiempo para ver el panorama de California	Menos tiempo para ver el panorama de California
No se puede visitar a los familiares a lo largo del camino	Se puede visitar a los familiares a lo largo del camino

Refiérase a estas características en los ejercicios 51 a 56.

51. Obtenga el conjunto universal U más pequeño que contenga todas las características listadas de ambas opciones.

Considere que F representa el conjunto de características de la opción de volar, y que D representa el conjunto de características de la opción de conducir. Use el conjunto universal del ejercicio 51.

52. Obtenga el conjunto F' 53. Obtenga el conjunto D'

Obtenga el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos en los ejercicios 54 a 56.

54. F y D 55. F' y D'

56. F y D'

Encuentro en la suite Hospitalidad Amie Carobrese, Bruce Collin, Corey Chapman, Dwayne Coy y Eric Cobbe planean encontrarse en la suite Hospitalidad después de que el director general termine su discurso en la junta de ventas de enero de su compañía de publicidad. Identifique a estas cinco personas por A , B , C , D y E , liste todos los conjuntos posibles de este grupo en los cuales se pueda reunir el siguiente número de personas.

57. Cinco personas 58. Cuatro personas

59. Tres personas 60. Dos personas

61. Una persona 62. Ninguna persona

63. Obtenga el número total de maneras en que los miembros de este grupo se pueden reunir en la suite. (Sugerencia: Obtenga el número total de conjuntos en sus respuestas de los ejercicios 57 a 62).

64. ¿Cómo se compara la respuesta del ejercicio 63 con el número de subconjuntos de un conjunto de cinco elementos? Interprete la respuesta del ejercicio 63 en términos de subconjuntos.

65. Los 25 miembros del club de matemáticas deben enviar una delegación a la junta de grupos de estudiantes en su escuela. La delegación puede incluir tantos miembros del club como se desee, pero al menos debe asistir un miembro. ¿Cuántas delegaciones diferentes son posibles? (Problema del calendario de *Mathematics Teacher*).

66. En el ejercicio 65, suponga que 10 de los miembros del club dicen que no desean participar en la delegación. Ahora, ¿cuántas delegaciones son posibles?

67. **Selección de billetes** Suponga que usted tiene los billetes mostrados.



- a) Si usted debe seleccionar al menos un billete, y puede seleccionar todos los billetes, ¿cuántas sumas de dinero puede obtener?
- b) En el inciso a), elimine la condición “debe seleccionar al menos un billete”. ¿Cuántas sumas son posibles?

68. **Selección de monedas** La fotografía muestra un grupo de monedas estadounidenses obsoletas, integradas por una moneda de un centavo, una de cinco centavos, una de 10 centavos, una de 25 centavos, y una de 50 centavos. Repita el ejercicio 67 sustituyendo “billete(s) por “moneda(s)”.



69. En la deducción de la expresión (2^n) para obtener el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos, observamos que para unos cuantos primeros valores de n , el incremento en uno del número de elementos duplica el número de subconjuntos. Aquí, usted puede someter a prueba la fórmula en general demostrando que lo mismo es verdadero para cualquier valor de n . Suponga que el conjunto A tiene n elementos y s subconjuntos. Ahora sume un elemento adicional, digamos e , al conjunto A . (Ahora tenemos un nuevo conjunto, digamos B , con $n + 1$ elementos). Divida los subconjuntos de B en los que contienen e y los que no contienen e .

- a) ¿Cuántos subconjuntos de B no contienen e ? (Sugerencia: Considere que cada uno de estos es un subconjunto del conjunto original A).
- b) ¿Cuántos subconjuntos de B contienen e ? (Sugerencia: Considere que cada uno de estos es un subconjunto del conjunto original A , con el elemento e insertado).
- c) ¿Cuál es el número total de subconjuntos de B ?
- d) ¿Qué concluye usted?

70. Esplique por qué \emptyset es tanto un subconjunto como un elemento de $\{\emptyset\}$.

2.3 OPERACIONES CON CONJUNTOS Y PRODUCTOS CARTESIANOS

Intersección de conjuntos • Unión de conjuntos • Diferencia de conjuntos • Pares ordenados • Producto cartesiano de conjuntos • Diagramas de Venn • Leyes de De Morgan

Intersección de conjuntos

Dos candidatos, Aimee Berger y Darien Estes, están compitiendo por una curul en el Congreso de la ciudad. Un votante trata de decidir por quién votar recordando las promesas de campaña hechas por los candidatos; cada promesa se identifica con una letra.

Aimee Berger	Darien Estes
Gastar menos dinero, m	Gastar menos dinero, m
Reforzar el cumplimiento de las leyes de tránsito, t	Tomar medidas enérgicas contra políticos deshonestos, p
Incrementar los servicios en áreas suburbanas, s	Incrementar los servicios en la ciudad, c

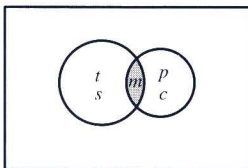


Figura 4

La única promesa común de ambos candidatos es la promesa m : gastar menos dinero. Supongamos que tomamos las promesas de cada candidato como un conjunto. Con las promesas de Berger se obtiene el conjunto $\{m, t, s\}$, mientras que con las promesas de Estes tenemos $\{m, p, c\}$. El elemento común m pertenece a la *intersección* de los dos conjuntos, como lo muestra la zona sombreada del diagrama de Venn de la **figura 4**.

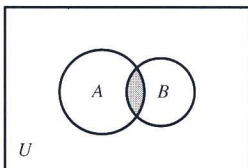
$$\{m, t, s\} \cap \{m, p, c\} = \{m\} \quad \cap \text{ representa la intersección de conjuntos.}$$

La intersección de dos conjuntos es por sí misma un conjunto.

Intersección de conjuntos

La **intersección** de los conjuntos A y B , representada por $A \cap B$, es el conjunto de elementos comunes para A y B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$



$$A \cap B$$

Figura 5

La **intersección de los conjuntos A y B** se forma tomando todos los elementos incluidos en ambos conjuntos, como muestra el área sombreada de la **figura 5**.

EJEMPLO 1 Obtención de intersecciones

Obtenga cada intersección.

a) $\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6, 8, 10\}$ b) $\{9, 14, 25, 30\} \cap \{10, 17, 19, 38, 52\}$

c) $\{5, 9, 11\} \cap \emptyset$

SOLUCIÓN

a) Los elementos comunes a ambos conjuntos son 4 y 6.

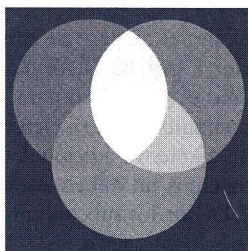
$$\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6, 8, 10\} = \{4, 6\}$$

b) Estos dos conjuntos no tienen elementos comunes.

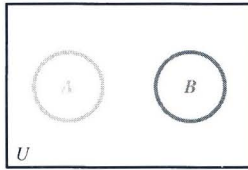
$$\{9, 14, 25, 30\} \cap \{10, 17, 19, 38, 52\} = \emptyset$$

c) No hay elementos en \emptyset , de modo que no hay elementos que pertenezcan a $\{5, 9, 11\}$ y \emptyset .

$$\{5, 9, 11\} \cap \emptyset = \emptyset$$



La luz blanca se puede ver como la intersección de los tres colores primarios.



Conjuntos disjuntos

Figura 6

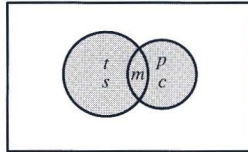


Figura 7

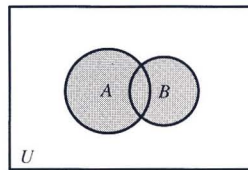
 $A \cup B$

Figura 8

Los **ejemplos 1b) y 1c)** muestran dos conjuntos que no tienen elementos en común. Los conjuntos sin elementos comunes se llaman conjuntos disjuntos (véase la **figura 6**). Un conjunto de perros y un conjunto de gatos son conjuntos disjuntos.

Los conjuntos A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

Unión de conjuntos

Una vez más en relación con las listas de promesas de campaña, suponga que un encuestador quiere resumir los tipos de promesas hechas por los candidatos. El encuestador necesitaría estudiar *todas* las promesas de *cada* candidato, es decir, el conjunto $\{m, t, s, p, c\}$. Este conjunto es la *unión* de los conjuntos de promesas, como muestra el área sombreada del diagrama de Venn en la **figura 7**.

Tenga cuidado de no confundir este símbolo con el conjunto universal U .

$$\{m, t, s\} \cup \{m, p, c\} = \{m, t, s, p, c\} \quad \cup \text{denota unión de conjuntos.}$$

Nuevamente, la unión de dos conjuntos es un conjunto.

Unión de conjuntos

La **unión** de los conjuntos A y B , representada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

La **unión de los conjuntos A y B** se forma tomando todos los elementos del conjunto A e incluyendo los elementos del conjunto B que no están en la lista. Véase la **figura 8**.

EJEMPLO 2 Obtención de uniones

Obtenga cada unión.

- $\{2, 4, 6\} \cup \{4, 6, 8, 10, 12\}$
- $\{a, b, d, f, g, h\} \cup \{c, f, g, h, k\}$
- $\{3, 4, 5\} \cup \emptyset$

SOLUCIÓN

- Inicie listando todos los elementos del primer conjunto, 2, 4 y 6. Luego liste todos los elementos del segundo conjunto, que no están en el primer conjunto, 8, 10 y 12. La unión se forma con *todos* estos elementos.

$$\{2, 4, 6\} \cup \{4, 6, 8, 10, 12\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

- $\{a, b, d, f, g, h\} \cup \{c, f, g, h, k\} = \{a, b, c, d, f, g, h, k\}$

- Como no hay elementos en \emptyset , la unión de $\{3, 4, 5\}$ y \emptyset solo contiene los elementos 3, 4 y 5.

$$\{3, 4, 5\} \cup \emptyset = \{3, 4, 5\}$$

■■■

Recuerde de la sección anterior que A' representa el *complemento* del conjunto A . El conjunto A' se forma tomando todos los elementos del conjunto universal U que no están en el conjunto A .

EJEMPLO 3 Obtención de intersecciones y uniones de complementos

Obtenga cada conjunto. Sea

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6\}, \text{ y } C = \{1, 3, 6, 9\}.$$

a) $A' \cap B$ b) $B' \cup C'$ c) $A \cap (B \cup C')$ d) $(A' \cup C') \cap B'$

SOLUCIÓN

a) Primero se identifican los elementos del conjunto A' , esto es, los elementos de U que no están en el conjunto A .

$$A' = \{5, 6, 9\}$$

Ahora, obtenga $A' \cap B$, el conjunto con los elementos que pertenecen tanto a A' como a B .

$$A' \cap B = \{5, 6, 9\} \cap \{2, 4, 6\} = \{6\}$$

b) $B' \cup C' = \{1, 3, 5, 9\} \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$

c) Primero obtenga el conjunto dentro del paréntesis.

$$B \cup C' = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

Ahora, obtenga la intersección de este conjunto con A .

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C') &= A \cap \{2, 4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6\} \\ &= \{2, 4\} \end{aligned}$$

d) $A' = \{5, 6, 9\}$ y $C' = \{2, 4, 5\}$, de manera que

$$A' \cup C' = \{5, 6, 9\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 4, 5, 6, 9\}.$$

$B' = \{1, 3, 5, 9\}$, de manera que

$$(A' \cup C') \cap B' = \{2, 4, 5, 6, 9\} \cap \{1, 3, 5, 9\} = \{5, 9\}.$$

■■■

Para reflexionar**Comparación de propiedades**

Las operaciones aritméticas de suma y multiplicación, cuando se aplican a números, tienen algunas propiedades conocidas. Si a , b y c son *números reales*, entonces la **propiedad conmutativa de la suma** dice que el orden de los números que se suman no importa:

$$a + b = b + a.$$

(¿Existe la **propiedad conmutativa en la multiplicación**?). La **propiedad asociativa de la suma** dice que cuando se suman tres números, no importa la agrupación de los mismos:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

(¿Existe la **propiedad asociativa en la multiplicación**?). El número 0 se conoce como el **elemento de identidad de la adición**, puesto que cuando se suma a cualquier número, este último no cambia.

$$a + 0 = a.$$

(¿Cuál es el **elemento de identidad de la multiplicación**?). Finalmente, la **propiedad distributiva de la multiplicación** sobre la suma dice que

$$a(b + c) = ab + ac.$$

(¿Existe una propiedad distributiva de la suma sobre la multiplicación?).

Para investigación individual o en grupo

Ahora considere las operaciones de unión e intersección, aplicadas a los conjuntos. Considerando definiciones o ejemplos, conteste las siguientes preguntas.

1. ¿La unión de conjuntos es conmutativa? ¿Y la intersección de conjuntos?
2. ¿La unión de conjuntos es asociativa? ¿Y la intersección de conjuntos?
3. ¿Existe un elemento de identidad para la unión de conjuntos? Si es así, ¿cuál es? ¿Y en la intersección de conjuntos?
4. ¿La intersección de conjuntos es distributiva sobre la unión de conjuntos? ¿La unión de conjuntos es distributiva sobre la intersección de conjuntos?

EJEMPLO 4 Descripción de conjuntos con palabras

Describa con palabras cada conjunto

a) $A \cap (B \cup C')$ b) $(A' \cup C') \cap B'$

SOLUCIÓN

a) Este conjunto se podría describir como “el conjunto que contiene todos los elementos de A y que también están en B o no están en C ”.

b) Una posibilidad es “el conjunto de todos los elementos que no están en A o no están en C , y tampoco están en B ”.

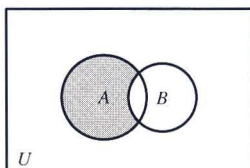
Diferencia de conjuntos

Suponga que $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Si se excluyen los elementos de B (o se separan) de A , se obtiene el conjunto $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. C se conoce como la *diferencia* de los conjuntos A y B .

Diferencia de conjuntos

La **diferencia** de los conjuntos A y B , representada como $A - B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A , pero que no pertenecen al conjunto B .

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



$A - B$
Figura 9

Como $x \notin B$ tiene el mismo significado que $x \in B'$, la diferencia de los conjuntos $A - B$ también se puede describir como

$$\{x | x \in A \text{ y } x \in B'\}, \text{ o } A \cap B'$$

La **figura 9** ilustra la idea de la diferencia de conjuntos. La región sombreada representa $A - B$.

EJEMPLO 5 Cálculo de diferencias de conjuntos

Obtenga cada conjunto.

$$\text{Sea } U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ B = \{2, 3, 6\}, \quad \text{y} \quad C = \{3, 5, 7\}.$$

a) $A - B$ b) $B - A$ c) $(A - B) \cup C'$

SOLUCIÓN

a) Inicie con el conjunto A y excluya todos los elementos que también se encuentran en el conjunto B .

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 6\} = \{1, 4, 5\}$$

b) Para estar en $B - A$, un elemento debe estar en el conjunto B y no en el conjunto A . Pero todos los elementos de B también están en A . Por lo tanto, $B - A = \emptyset$.

c) Partiendo del inciso a), $A - B = \{1, 4, 5\}$. También, $C' = \{1, 2, 4, 6\}$.

$$(A - B) \cup C' = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

Los resultados de los **ejemplos 5 a) y 5 b)** ilustran que, en general,

$$A - B \neq B - A.$$

Pares ordenados

Cuando se escribe un conjunto que contiene varios elementos, el orden en el cual aparecen los elementos no es relevante. Por ejemplo,

$$\{1, 5\} = \{5, 1\}.$$

Sin embargo, existen muchas situaciones en matemáticas en que, cuando dos objetos están aparejados, el orden en el cual se escriben los objetos es importante. Esto trae consigo la idea del *par ordenado*. Cuando se escriben pares ordenados, se usan paréntesis en lugar de llaves, las cuales se reservan para la escritura de conjuntos.

Pares ordenados

En el **par ordenado** (a, b) , a se llama **primer componente** y b es el **segundo componente**. En general, $(a, b) \neq (b, a)$.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son **iguales** siempre y cuando sus primeros componentes sean iguales, y sus segundos componentes sean iguales.

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = c \text{ y } b = d.$$

EJEMPLO 6 Determinación de la igualdad de conjuntos y de pares ordenados

Identifique si cada enunciado es *falso* o *verdadero*.

a) $(3, 4) = (5 - 2, 1 + 3)$ b) $\{3, 4\} \neq \{4, 3\}$ c) $(7, 4) = (4, 7)$

SOLUCIÓN

- a) Como $3 = 5 - 2$ y $4 = 1 + 3$, los primeros componentes son iguales y los segundos componentes también son iguales. El enunciado es *verdadero*.
- b) Como estos son conjuntos y no pares ordenados, el orden en el cual se listan los elementos no importa. Como estos conjuntos son iguales, el enunciado es *falso*.
- c) Los pares ordenados $(7, 4)$ y $(4, 7)$ no son iguales porque no satisfacen los requerimientos de igualdad de los pares ordenados. El enunciado es *falso*. ■■■

Producto cartesiano de conjuntos

Un conjunto puede contener pares ordenados como elementos. Si A y B son conjuntos, entonces cada elemento de A se puede aparejar con cada elemento de B , y los resultados se pueden escribir como pares ordenados. El conjunto de todos estos pares ordenados se llama *producto cartesiano* de A y B , y se representa como $A \times B$ y se lee “ A por B ”. El nombre del producto se debe al matemático francés René Descartes.

Producto cartesiano de conjuntos

El producto cartesiano de los conjuntos A y B se define como sigue.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ y } b \in B\}$$

EJEMPLO 7 Cálculo de productos cartesianos

Sea $A = \{1, 5, 9\}$ y $B = \{6, 7\}$. Obtenga cada conjunto siguiente.

a) $A \times B$ b) $B \times A$

SOLUCIÓN

- a) Se apareja cada elemento de A con cada elemento de B . Se escriben los resultados como pares ordenados, con el elemento de A escrito primero y el elemento de B en segundo lugar. Se escribe el conjunto.

$$A \times B = \{(1, 6), (1, 7), (5, 6), (5, 7), (9, 6), (9, 7)\}$$

- b) Como B está primero, este conjunto consiste en pares ordenados que tienen sus componentes intercambiados cuando se comparan con los del inciso a).

$$B \times A = \{(6, 1), (7, 1), (6, 5), (7, 5), (6, 9), (7, 9)\}$$

El orden en el cual se listan los pares ordenados no es importante. Por ejemplo, otro modo de escribir $B \times A$ en el **ejemplo 7b)** sería:

$$\{(6, 1), (6, 5), (6, 9), (7, 1), (7, 5), (7, 9)\}.$$

EJEMPLO 8

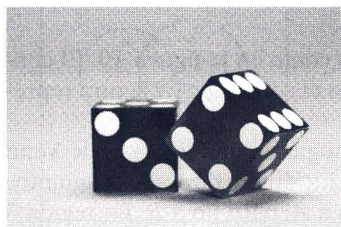
Obtención del producto cartesiano de un conjunto multiplicado por sí mismo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calcule $A \times A$.

SOLUCIÓN

Se apareja el 1 con cada elemento del conjunto, el 2 con cada elemento del conjunto, y así sucesivamente.

$$\begin{aligned} A \times A = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ & (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \end{aligned}$$



El **producto cartesiano** del **ejemplo 8** representa todos los resultados posibles que se obtienen cuando se lanzan dos dados. Este producto cartesiano es importante cuando se estudian ciertos problemas en técnicas de conteo y probabilidad.

A partir del **ejemplo 7** se observa que, en general,

$$A \times B \neq B \times A,$$

porque no contienen exactamente los mismos pares ordenados. Sin embargo, cada conjunto posee el mismo número de elementos, seis. Además, $n(A) = 3$, $n(B) = 2$, y $n(A \times B) = n(B \times A) = 6$. Como $3 \cdot 2 = 6$, uno podría concluir que el número cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos es igual al producto de los dos números cardinales de los conjuntos. En general, esta conclusión es correcta.

Número cardinal de un producto cartesiano

Si $n(A) = a$ y $n(B) = b$, entonces, lo siguiente es verdadero.

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B) = n(B) \cdot n(A) = ab = ba$$

EJEMPLO 9

Obtención de números cardinales de productos cartesianos

Obtenga $n(A \times B)$ y $n(B \times A)$ a partir de la información proporcionada.

$$a) A = \{a, b, c, d, e, f, g\} \text{ y } B = \{2, 4, 6\} \quad b) n(A) = 24 \text{ y } n(B) = 5$$

SOLUCIÓN

a) Como $n(A) = 7$ y $n(B) = 3$, $n(A \times B)$ y $n(B \times A)$ son iguales a $7 \cdot 3$, es decir, 21.

$$b) n(A \times B) = n(B \times A) = 24 \cdot 5 = 5 \cdot 24 = 120$$

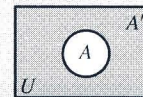
Una **operación** es una regla o un procedimiento por medio del cual se usa uno o más objetos para obtener otro objeto. Las operaciones más comunes sobre conjuntos se resumen en el cuadro de la página siguiente.

Operaciones de conjuntos

Sean A y B conjuntos cualesquiera, y U el conjunto universal.

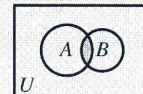
El **complemento** de A , representado por A' es:

$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$



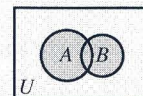
La **intersección** de A y B es:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



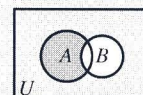
La **unión** de A y B es:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



La **diferencia** de A y B es:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$



El **producto cartesiano** de A y B es:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

Diagramas de Venn

Se puede usar el diagrama de Venn con un solo conjunto como en la **figura 10**. El conjunto universal U se divide en dos regiones: una representa el conjunto A y la otra representa el conjunto A' .

Dos conjuntos A y B dentro del conjunto universal sugieren un diagrama de Venn como el de la **figura 11**. La región 1 incluye aquellos elementos fuera de ambos conjuntos A y B . La región 2 incluye los elementos que pertenecen a A , pero no a B . La región 3 incluye aquellos elementos que pertenecen tanto a A como a B . ¿Cómo describiría los elementos de la región 4?

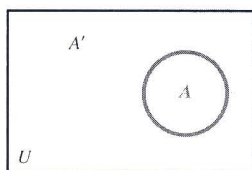
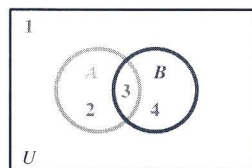


Figura 10



La numeración es arbitraria. Los números señalan cuatro regiones, no números cardinales ni elementos.

Figura 11

EJEMPLO 10 Sombreado de diagramas de Venn para representar conjuntos

Dibuje un diagrama de Venn similar al de la **figura 11** y sombree la región o regiones que representan cada conjunto.

- a) $A' \cap B$ b) $A' \cup B'$

SOLUCIÓN

- a) Observe la **figura 11**. El conjunto A' contiene todos los elementos fuera del conjunto A ; en otras palabras, los elementos en las regiones 1 y 4. El conjunto B está conformado por los elementos en las regiones 3 y 4. La intersección de los conjuntos A' y B está formada por los elementos en la región común (1 y 4) y (3 y 4), que corresponde a la región 4. Por lo tanto, $A' \cap B$ está representada por la región 4, sombreada en la **figura 12**. Esta región también se puede describir como $B - A$.

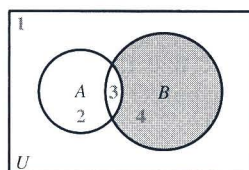


Figura 12

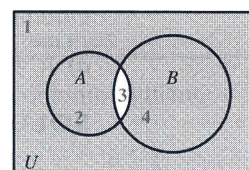


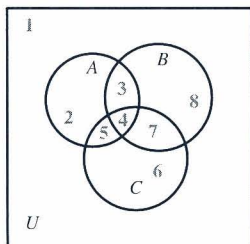
Figura 13

- b) Nuevamente, el conjunto A' está representado por las regiones 1 y 4, mientras que B' está formado por las regiones 1 y 2. La unión de A' y B' , el conjunto $A' \cup B'$, está integrada por los elementos que pertenecen a la unión de las regiones 1, 2 y 4, la cual está sombreada en la **figura 13**. ■■■

EJEMPLO 11 Localización de elementos en un diagrama de Venn

Coloque los elementos de los conjuntos en sus ubicaciones correctas en un diagrama de Venn.

Sean $U = \{q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$, $A = \{r, s, t, u, v\}$, y $B = \{t, v, x\}$.



La numeración es arbitraria. Los números indican regiones, no números cardinales o elementos.

Figura 15

SOLUCIÓN

Como $A \cap B = \{t, v\}$, los elementos t y v se colocan en la región 3 de la **figura 14**. Los elementos restantes de A , es decir, r, s y u van en la región 2. La figura muestra la ubicación correcta de los demás elementos.

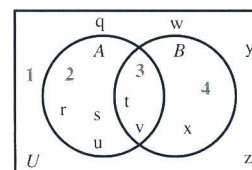


Figura 14 ■■■

Para incluir tres conjuntos A, B y C , dentro de un conjunto universal, se dibuja un diagrama de Venn como el de la **figura 15**, donde nuevamente se muestra la numeración arbitraria de las regiones.

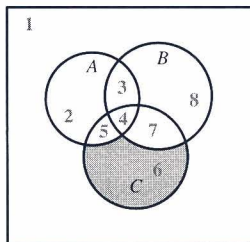
EJEMPLO 12 Sombreado de un conjunto en un diagrama de Venn

Sombree el conjunto $(A' \cap B') \cap C$ en un diagrama de Venn, similar al de la **figura 15**.

SOLUCIÓN

Primero trabaje dentro del paréntesis. Como se muestra en la **figura 16**, el conjunto A' está formado por las regiones fuera del conjunto A , es decir, las regiones 1, 6, 7 y 8. El conjunto B' está integrado por las regiones 1, 2, 5 y 6. La intersección de estos conjuntos está dada por el traslape de las regiones 1, 6, 7 y 8, y las regiones 1, 2, 5 y 6, es decir, las regiones 1 y 6.

Para el diagrama de Venn final se obtiene la intersección de las regiones 1 y 6 con el conjunto C . Como se observa en la **figura 16**, el conjunto C está formado por las regiones 4, 5, 6 y 7. El traslape de las regiones 1, 6 y 4, 5, 6, 7 es la región 6, la región sombreada de la **figura 16**. ■■■



$(A' \cap B') \cap C$

Figura 16

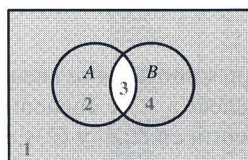
EJEMPLO 13 Verificación de un enunciado mediante un diagrama de Venn

El enunciado $(A \cap B)' = A' \cup B'$, ¿es verdadero para todos los conjuntos A y B ?

SOLUCIÓN

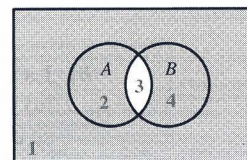
Para facilitar la solución, use las regiones identificadas en la **figura 11**. El conjunto $A \cap B$ está formado por la región 3, de modo que $(A \cap B)'$ está integrado por las regiones 1, 2 y 4. Estas regiones están sombreadas en la **figura 17 a**.

Para obtener el diagrama de Venn del conjunto $A' \cup B'$, se verifica primero que A' está formada por las regiones 1 y 4, mientras que el conjunto B' incluye las regiones 1 y 2. Finalmente, $A' \cup B'$ se integra con las regiones 1 y 4, o 1 y 2, es decir, las regiones 1, 2 y 4. Estas regiones están sombreadas en la **figura 17 b**.



$(A \cap B)'$ está sombreada.

a)



$A' \cup B'$ está sombreada.

b)

Figura 17

El hecho de que las mismas regiones estén sombreadas en ambos diagramas de Venn sugiere que

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$



Leyes de De Morgan

El resultado del **ejemplo 13** se puede expresar con palabras.

El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de los complementos de los dos conjuntos.

Como consecuencia, es natural preguntarnos si también es verdad que el complemento de la *unión* de dos conjuntos es igual a la *intersección* de los complementos de los dos conjuntos (donde las palabras “intersección” y “unión” se sustituyen entre sí). El especialista en lógica, el británico Augustus de Morgan (1806-1871), investigó este asunto y encontró que es verdadero. (Véase la nota al margen de la **página 21**). A continuación se presentan las dos leyes de De Morgan para conjuntos.

Leyes de De Morgan para conjuntos

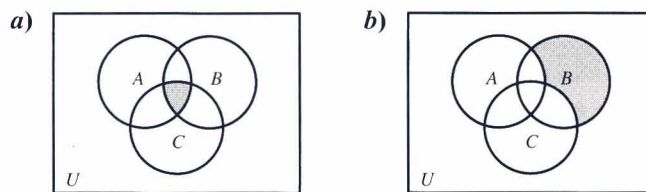
Para dos conjuntos A y B ,

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{y} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Los diagramas de Venn de la **figura 17** demuestran de forma contundente el carácter verdadero de la primera de las leyes de De Morgan. Proporcionan una *conjetura*. Las pruebas reales de las leyes de De Morgan requerirían métodos utilizados en cursos más avanzados de teoría de conjuntos.

EJEMPLO 14 Descripción de regiones en diagramas de Venn utilizando símbolos

En los siguientes diagramas de Venn, haga una descripción simbólica de la región sombreada, usando $A, B, \cap, \cup, -$ y $'$ las veces que sea necesario.



- c) Remítase a la figura del inciso **b)** y encuentre dos maneras más para describir la región sombreada.

SOLUCIÓN

- a) La región sombreada pertenece a los tres conjuntos, A, B y C . Por lo tanto, la región corresponde a

$$A \cap B \cap C.$$

- b) La región sombreada se encuentra en el conjunto B , y no pertenece a A ni a C . Como no pertenece a A , se encuentra en A' ; lo mismo ocurre con C . Por lo tanto, la región se encuentra en B, A' y C' , y es igual a:

$$B \cap A' \cap C'.$$

- c) La región sombreada ocupa totalmente B con excepción de las regiones que pertenecen tanto a A como a C . Esto sugiere la idea de la diferencia de conjuntos. La región se puede describir como:

$$B - (A \cup C), \quad \text{o de manera equivalente,} \quad B \cap (A \cup C)'. \quad \blacksquare$$

2.3 EJERCICIOS

Asocie cada término del grupo I con la descripción apropiada (A a F) del grupo II. Suponga que A y B son conjuntos.

I

1. La intersección de A y B.
2. La unión de A y B.
3. La diferencia de A y B.
4. El complemento de A.
5. El producto cartesiano de A y B.
6. La diferencia de B y A.

II

- A. El conjunto de elementos de A que no están en B.
- B. El conjunto de elementos comunes a A y B.
- C. El conjunto de elementos en el conjunto universal que no están en A.
- D. El conjunto de elementos en B que no están en A.
- E. El conjunto de pares ordenados tal que cada primer elemento pertenece a A y cada segundo elemento pertenece a B, con cada elemento de A aparejado con cada elemento de B.
- F. El conjunto de elementos que se encuentran en A o en B o en A y B.

Realice las operaciones indicadas, y designe cada respuesta usando el método de listado.

Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $X = \{a, c, e, g\}$,
 $Y = \{a, b, c\}$ y $Z = \{b, c, d, e, f\}$.

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|----------------|
| 7. $X \cap Y$ | 8. $X \cup Y$ | 9. $Y \cup Z$ |
| 10. $Y \cap Z$ | 11. $X \cup U$ | 12. $Y \cap U$ |
| 13. X' | 14. Y' | |
| 15. $X' \cap Y'$ | 16. $X' \cap Z$ | |
| 17. $X \cup (Y \cap Z)$ | 18. $Y \cap (X \cup Z)$ | |
| 19. $(Y \cap Z') \cup X$ | 20. $(X' \cup Y') \cup Z$ | |
| 21. $(Z \cup X')' \cap Y$ | 22. $(Y \cap X')' \cup Z'$ | |
| 23. $X - Y$ | 24. $Y - X$ | |
| 25. $X \cap (X - Y)$ | 26. $Y \cup (Y - X)$ | |
| 27. $X' - Y$ | 28. $Y' - X$ | |
| 29. $(X \cap Y') \cup (Y \cap X')$ | 30. $(X \cap Y') \cap (Y \cap X')$ | |
| 31. $A \cup (B' \cap C')$ | 32. $(A \cap B') \cup (B \cap A')$ | |
| 33. $(C - B) \cup A$ | 34. $B \cap (A' - C)$ | |
| 35. $(A - C) \cup (B - C)$ | 36. $(A' \cap B') \cup C'$ | |

Describe cada conjunto con palabras.

Efectos nocivos del alcohol y el tabaco La siguiente tabla lista algunos efectos nocivos comunes del consumo prolongado de tabaco y alcohol.

Tabaco	Alcohol
Daño al hígado, e	Daño al hígado, l
Daño al cerebro, h	Daño al cerebro, b
Cáncer, c	Daño al corazón, h

Sea T el conjunto de los efectos listados del consumo de tabaco y A el conjunto de los efectos listados del consumo de alcohol. Obtenga cada conjunto.

37. El conjunto universal U más pequeño posible que incluya todos los efectos listados.
38. A'
39. T'
40. $T \cap A$

41. $T \cup A$
42. $T \cap A'$

Describe con palabras cada conjunto de los ejercicios 43 a 48.

Sean U = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos, A = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos con las deducciones desglosadas, B = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos mostrando los ingresos de negocios, C = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos presentadas en 2009, D = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos seleccionadas para auditoría.

43. $B \cup C$
44. $A \cap D$
45. $C - A$
46. $D \cup A'$
47. $(A \cup B) - D$
48. $(C \cap A) \cap B'$

Form 1040 U.S. Individual Income Tax Return 2009

Department of the Treasury - Internal Revenue Service

For the year Jan. 1-Dec. 31, 2008, or other tax year beginning 2008, ending 2009

IRS Use Only—Do not write or staple in this space. OMB No. 1545-0047

Label (See instructions on page 1.4.)

Use the IRS label. Otherwise, please print or type.

Presidential Election Campaign Check here if you, or your spouse if filing jointly, want \$3 to go to this fund (see page 14) Yes No

Filing Status

1 Single

2 Married filing jointly (even if only one had income)

3 Married filing separately. Enter spouse's SSN above and full name here. 4 Head of household (with qualifying person). (See page 15.) If the qualifying person is a child but not your dependent, enter this child's name here.

5 Qualifying widow(er) with dependent child (see page 16)

Exemptions

6a Yourself, if someone can claim you as a dependent, do not check box 6a

b Spouse

c **Dependents:** (f) First name Last name (g) Dependent's social security number (h) Dependent's relationship to you (i) If a qualifying child (see page 17) If not a qualifying child (see page 17)

Boxes checked on 6a and 6b: No. of children on 6b who are lived with you did not live with you due to divorce (see page 16)

Dependents on 6c not entered above

d Total number of exemptions claimed

Income

7 Wages, salaries, tips, etc. Attach Form(s) W-2 7

8a Taxable interest. Attach Schedule B if required 8a

9a Tax-exempt interest. Do not include on line 8a 8b

9b Ordinary dividends. Attach Schedule B if required 9a

9c Qualified dividends (see page 22) 9b

10 Taxable refunds, credits, or offsets of state and local income taxes (see page 23) 10

11 Alimony received 11

12 Business income or (loss). Attach Schedule C or C-EZ 12

13 Capital gain or (loss). Attach Schedule D if required. If not required, check here 13

14 Other gains or (losses). Attach Form 4797 14

15a IRA distributions 15a b Taxable amount (see page 24) 15b

16a Pensions and annuities 16a b Taxable amount (see page 25) 16b

17 Rental real estate, royalties, partnerships, S corporations, trusts, etc. Attach Schedule E 17

18 Farm income or (loss). Attach Schedule F 18

19 Unemployment compensation in excess of \$2,400 per recipient (see page 27) 19

20a Social security benefits 20a b Taxable amount (see page 27) 20b

21 Other income. List type and amount (see page 29) 21

22 Add the amounts in the far right column for lines 7 through 21. This is your total income 22

Adjusted Gross Income

23 Educator expenses (see page 29) 23

24 Certain business expenses of reservists, performing artists, and fee-basis government officials. Attach Form 2150 or 2150-EZ 24

25 Health savings account deduction. Attach Form 8889 25

26 Moving expenses. Attach Form 3903 26

27 One-half of self-employment tax. Attach Schedule SE 27

28 Self-employed SEP, SIMPLE, and qualified plans 28

29 Self-employed health insurance deduction (see page 30) 29

30 Penalty on early withdrawal of savings 30

31a Alimony paid b Recipient's SSN 31a

32 IRA deduction (see page 31) 32

33 Student loan interest deduction (see page 34) 33

34 Tuition and fees deduction. Attach Form 8917 34

35 Domestic production activities deduction. Attach Form 8903 35

36 Add lines 23 through 31a and 32 through 35 36

37 Subtract line 36 from line 22. This is your adjusted gross income 37

Form Disclosure, Privacy Act, and Paperwork Reduction Act Notice, see page 97. Cat. No. 1132008 Form 1040 (2009)

Suponiendo que A y B representan dos conjuntos cualesquiera, identifique cada enunciado como siempre verdadero o no siempre verdadero.

49. $A \subseteq (A \cup B)$

50. $A \subseteq (A \cap B)$

51. $(A \cap B) \subseteq A$

52. $(A \cup B) \subseteq A$

53. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

54. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

En los ejercicios 55 a 60, use los resultados de los incisos **a)** y **b)** para contestar el inciso **c)**.

Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$
 y $Z = \{3, 4, 5\}$.

- 55. a) Obtenga $X \cup Y$.
 b) Obtenga $Y \cup X$.
 c) Enuncie una conjetura.
- 56. a) Obtenga $X \cap Y$.
 b) Obtenga $Y \cap X$.
 c) Enuncie una conjetura.
- 57. a) Obtenga $X \cup (Y \cup Z)$.
 b) Obtenga $(X \cup Y) \cup Z$.
 c) Enuncie una conjetura.
- 58. a) Obtenga $X \cap (Y \cap Z)$.
 b) Obtenga $(X \cap Y) \cap Z$.
 c) Enuncie una conjetura.
- 59. a) Obtenga $(X \cup Y)'$.
 b) Obtenga $X' \cap Y'$.
 c) Enuncie una conjetura.
- 60. a) Obtenga $(X \cap Y)'$.
 b) Obtenga $X' \cup Y'$.
 c) Enuncie una conjetura.

En los ejercicios 61 y 62, sea X el conjunto integrado por las diferentes letras de su apellido.

- 61. Obtenga $X \cup \emptyset$ y enuncie una conjetura.
- 62. Obtenga $X \cap \emptyset$ y enuncie una conjetura.

Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

63. $(3, 2) = (5 - 2, 1 + 1)$

64. $(10, 4) = (7 + 3, 5 - 1)$

65. $(6, 3) = (3, 6)$

66. $(2, 13) = (13, 2)$

67. $\{6, 3\} = \{3, 6\}$

68. $\{2, 13\} = \{13, 2\}$

69. $\{(1, 2), (3, 4)\} = \{(3, 4), (1, 2)\}$

70. $\{(5, 9), (4, 8), (4, 2)\} = \{(4, 8), (5, 9), (4, 2)\}$

Obtenga $A \times B$ y $B \times A$ para A y B definidos como sigue.

71. $A = \{2, 8, 12\}$, $B = \{4, 9\}$

72. $A = \{3, 6, 9, 12\}$, $B = \{6, 8\}$

73. $A = \{d, o, g\}$, $B = \{p, i, g\}$

74. $A = \{b, l, u, e\}$, $B = \{r, e, d\}$

En los conjuntos especificados en los ejercicios 75 a 78, use la información proporcionada para obtener $n(A \times B)$ y $n(B \times A)$.

75. Los conjuntos del **ejercicio 71**.

76. Los conjuntos del **ejercicio 73**.

77. $n(A) = 35$ y $n(B) = 6$.

78. $n(A) = 13$ y $n(B) = 5$.

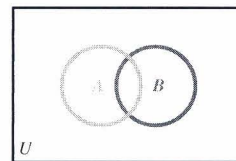
Obtenga el número cardinal especificado.

79. Si $n(A \times B) = 72$ y $n(A) = 12$, obtenga $n(B)$.

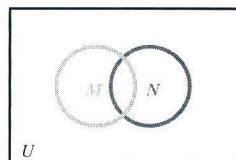
80. Si $n(A \times B) = 300$ y $n(B) = 30$, obtenga $n(A)$.

Coloque los elementos de estos conjuntos en las ubicaciones correctas en el diagrama de Venn proporcionado.

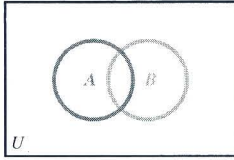
- 81. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
 $A = \{b, d, f, g\}$,
 $B = \{a, b, d, e, g\}$.



- 82. Sean $U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
 $M = \{5, 8, 10, 11\}$,
 $N = \{5, 6, 7, 9, 10\}$.

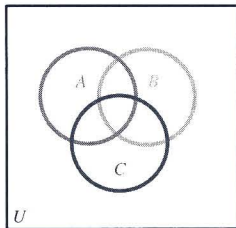


Use un diagrama de Venn similar al mostrado a continuación para sombrear cada conjunto.



- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| 83. $B \cap A'$ | 84. $A \cup B$ |
| 85. $A' \cup B$ | 86. $A' \cap B'$ |
| 87. $B' \cup A$ | 88. $A' \cup A$ |
| 89. $B' \cap B$ | 90. $A \cap B'$ |
| 91. $B' \cup (A' \cap B')$ | 92. $(A \cap B) \cup B$ |
| 93. U' | 94. \emptyset' |

En los ejercicios 95 y 96, coloque los elementos de estos conjuntos en la ubicación correcta en un diagrama de Venn similar al mostrado a continuación.



95. Sean $U = \{m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w\}$,
 $A = \{m, n, p, q, r, t\}$,
 $B = \{m, o, p, q, s, u\}$,
 $C = \{m, o, p, r, s, t, u, v\}$.
96. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A = \{1, 3, 5, 7\}$,
 $B = \{1, 3, 4, 6, 8\}$,
 $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

Use un diagrama de Venn para sombrear cada conjunto.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 97. $(A \cap B) \cap C$ | 98. $(A \cap C') \cup B$ |
| 99. $(A \cap B) \cup C'$ | 100. $(A' \cap B) \cap C$ |
| 101. $(A' \cap B') \cap C$ | 102. $(A \cup B) \cup C$ |
| 103. $(A \cap B') \cup C$ | 104. $(A \cap C') \cap B$ |
| 105. $(A \cap B') \cap C'$ | 106. $(A' \cap B') \cup C$ |
| 107. $(A' \cap B') \cup C'$ | 108. $(A \cap B)' \cup C$ |

Escriba una descripción simbólica de cada área sombreada. Use los símbolos $A, B, C, \cap, \cup, -$ y $'$ tantas veces como sea necesario. Puede haber más de una respuesta.

- | | |
|------|------|
| 109. | 110. |
| 111. | 112. |
| 113. | |
| 114. | |
| 115. | |
| 116. | |

Suponga que A y B son conjuntos. Describa las condiciones en las cuales cada enunciado sería verdadero.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 117. $A = A - B$ | 118. $A = B - A$ |
| 119. $A = A - \emptyset$ | 120. $A = \emptyset - A$ |
| 121. $A \cup \emptyset = \emptyset$ | 122. $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| 123. $A \cap \emptyset = A$ | 124. $A \cup \emptyset = A$ |
| 125. $A \cup A = \emptyset$ | 126. $A \cap A = \emptyset$ |
| 127. $A \cup B = A$ | 128. $A \cap B = B$ |

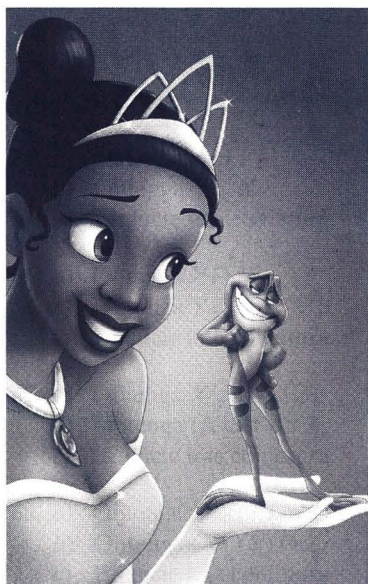
En los ejercicios 129 a 135, dibuje dos diagramas de Venn adecuados para identificar si el enunciado es siempre verdadero o no siempre verdadero.

- 129. $A \cap A' = \emptyset$
- 130. $A \cup A' = U$
- 131. $(A \cap B) \subseteq A$
- 132. $(A \cup B) \subseteq A$
- 133. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = A$.
- 134. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = B$.

- 135. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(Segunda ley de De Morgan).
- 136. Si A y B son conjuntos, ¿necesariamente es verdad que $n(A - B) = n(A) - n(B)$?
- 137. Si $Q = \{x|x \text{ es un número racional}\}$ y $H = \{x|x \text{ es un número irracional}\}$, describa cada conjunto.
 - a) $Q \cup H$
 - b) $Q \cap H$

2.4 ENCUESTAS Y NÚMEROS CARDINALES

Encuestas • Fórmula para obtener números cardinales • Tablas



Encuestas

Los problemas que implican a conjuntos de personas (u objetos) en ocasiones requieren el análisis de información conocida acerca de ciertos subconjuntos, para así obtener números cardinales de otros subconjuntos. En esta sección aplicaremos tres técnicas para solucionar este tipo de problemas: diagramas de Venn, fórmulas para números cardinales y tablas. Es bastante frecuente (aunque no siempre) obtener la “información conocida” a través de una investigación.

Suponga que en una universidad se pide a un grupo de estudiantes comparar algunas películas de dibujos animados, y se genera la siguiente información.

- | | |
|---|--|
| A 34 les gusta <i>Up</i> | A 12 les gustan <i>Up</i> y <i>Mr. Fox</i> |
| A 29 les gusta <i>The Princess and the Frog</i> | A 10 les gustan <i>Princess</i> y <i>Mr. Fox</i> |
| A 26 les gusta <i>Fantastic Mr. Fox</i> | A 4 les gustan las tres películas |
| A 16 les gustan <i>Up</i> y <i>Princess</i> | A 5 no les gusta ninguna de estas películas |

Para determinar el número total de estudiantes investigados, no podemos sumar los 8 números citados anteriormente, porque existen superposiciones. Por ejemplo, en la **figura 18**, los 34 estudiantes a quienes les gusta *Up* no deben estar ubicados en la región *b*, sino distribuirse entre las regiones *b*, *c*, *d* y *e*, de una manera que sea congruente con el total de datos proporcionados. (La región *b* en realidad incluye a los estudiantes a quienes les gusta *Up*, pero no les gusta *The Princess and the Frog* y no les gusta *Fantastic Mr. Fox*).

Debido a que, al principio, no sabemos cómo distribuir a los 34 que les gusta *Up*, buscamos primero datos más manejables. La lista total más pequeña, los 4 estudiantes a quienes les gustan las tres películas, se puede colocar en la región *d* (la intersección de los tres conjuntos). Los 5 a los que no les gusta ninguna de las tres películas deben ubicarse en la región *a*. Luego, los 16 a quienes les gusta *Up* y *Princess* deben ir en las regiones *d* y *e*. Como la región *d* ya contiene 4 estudiantes, debemos colocar:

$$16 - 4 = 12 \text{ en la región } e.$$

Como a 12 estudiantes les gustan *Up* y *Mr. Fox* (regiones *c* y *d*), colocamos:

$$12 - 4 = 8 \text{ en la región } c.$$

Ahora que las regiones *c*, *d* y *e* incluyen a 8, 4 y 12 estudiantes, respectivamente, debemos colocar:

$$34 - 8 - 4 - 12 = 10 \text{ en la región } b.$$

Mediante un razonamiento similar, a todas las regiones se les asignan los números correctos. Véase la **figura 19** de la siguiente página.

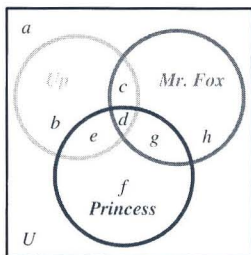


Figura 18

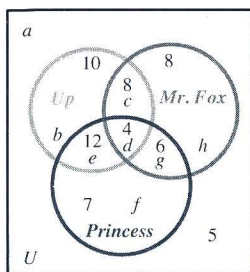


Figura 19

EJEMPLO 1 Análisis de una encuesta

Use los datos de la encuesta de preferencias de los estudiantes por las películas de dibujos animados, como se resumen en la **figura 19**, para contestar las siguientes preguntas:

- ¿A cuántos estudiantes les gusta solo *Fantastic Mr. Fox*?
- ¿A cuántos estudiantes les gustan exactamente dos películas?
- ¿Cuántos estudiantes fueron encuestados?

SOLUCIÓN

a) El estudiante al que solo le gusta *Mr. Fox* no le gusta *Up* y no le gusta *Princess*. Estos estudiantes están dentro de las regiones de *Mr. Fox* y fuera de las regiones de *Up* y *Princess*. La región *h* es la adecuada en la **figura 19**, y vemos que a 8 estudiantes les gusta solo *Fantastic Mr. Fox*.

b) A los estudiantes de las regiones *c*, *e* y *g* les gustan exactamente dos películas. El número total de estos estudiantes es:

$$8 + 12 + 6 = 26.$$

c) Cada estudiante encuestado se ha colocado exactamente en una región de la **figura 19**, de modo que el número total de encuestados es la suma de los números de las ocho regiones:

$$5 + 10 + 8 + 4 + 12 + 7 + 6 + 8 = 60. \quad \blacksquare$$

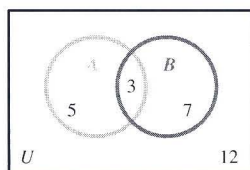


Figura 20

Fórmula para obtener números cardinales

Si los números mostrados en la **figura 20** son los números cardinales de las regiones individuales, entonces:

$$n(A) = 5 + 3 = 8, \quad n(B) = 3 + 7 = 10, \quad n(A \cap B) = 3,$$

$$\text{y} \quad n(A \cup B) = 5 + 3 + 7 = 15.$$

Observe que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ porque $15 = 8 + 10 - 3$. Esta relación es verdadera para dos conjuntos *A* y *B* cualesquiera.

Fórmula para números cardinales

Para dos conjuntos *A* y *B* cualesquiera, lo siguiente es verdadero:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Esta fórmula se puede replantear para obtener cualquiera de sus cuatro términos cuando se conocen los demás.

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula para obtener números cardinales

Obtenga $n(A)$ si $n(A \cup B) = 22$, $n(A \cap B) = 8$, y $n(B) = 12$.

SOLUCIÓN

Aplicamos la fórmula cardinal para obtener $n(A)$.

$$\begin{aligned} n(A) &= n(A \cup B) - n(B) + n(A \cap B) \\ &= 22 - 12 + 8 \\ &= 18 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Algunas veces, incluso cuando la información se presenta como en el **ejemplo 2**, es más conveniente ajustar esa información a un diagrama de Venn como en el **ejemplo 1**.

EJEMPLO 3 Análisis de los datos de un informe

Scott Heeren, quien lidera un grupo de ingenieros de software que investigan actividades ilegales en redes sociales, reportó la siguiente información:

- T = el conjunto de los miembros del grupo que siguen patrones en Twitter.
- F = el conjunto de los miembros del grupo que siguen patrones en Facebook.
- L = el conjunto de los miembros del grupo que siguen patrones en LinkedIn.

$$\begin{aligned} n(T) &= 13 & n(T \cap F) &= 9 & n(T \cap F \cap L) &= 5 \\ n(F) &= 16 & n(F \cap L) &= 10 & n(T' \cap F' \cap L') &= 3 \\ n(L) &= 13 & n(T \cap L) &= 6 & & \end{aligned}$$

¿Cuántos ingenieros hay en el grupo de Scott?

SOLUCIÓN

Los datos de Scott se representan en la **figura 21**. La suma de los números del diagrama proporciona el número total de ingenieros en el grupo.

$$3 + 3 + 1 + 2 + 5 + 5 + 4 + 2 = 25$$

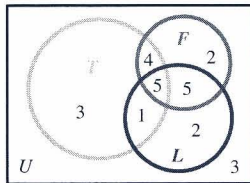


Figura 21

Tablas

Algunas veces la información aparece en una tabla en lugar de un diagrama de Venn, pero las ideas básicas de unión e intersección son las mismas.

EJEMPLO 4 Análisis de los datos de una tabla

Melanie Cutler, la oficial encargada de la cafetería en una base militar, quería saber si la bebida preferida en el almuerzo por los hombres y las mujeres enlistados dependía de la edad. Un día determinado, Melanie clasificó los patrones del almuerzo de acuerdo con la edad y la bebida preferida, y registró los resultados en una tabla.

		Bebida			Totales
		Bebida de cola (C)	Té frío (I)	Té dulce (S)	
Edad	18–25 (Y)	45	10	35	90
	26–33 (M)	20	25	30	75
	Mayor de 33 (O)	5	30	20	55
Totales		70	65	85	220

Usando las letras de la tabla, obtenga el número de personas en cada conjunto.

- a) $Y \cap C$ b) $O' \cup I$

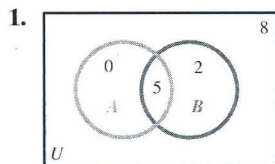
SOLUCIÓN

- a) El conjunto Y incluye a todo el personal representado a lo largo de la fila superior de la tabla (90 en total), mientras que C incluye a los 70 de la columna izquierda. La intersección de estos dos conjuntos es exactamente la entrada superior izquierda, es decir, 45 personas.
- b) El conjunto O' excluye la fila inferior, de modo que incluye la primera y segunda filas. El conjunto I incluye solamente la columna de en medio. La unión de los dos conjuntos representa:

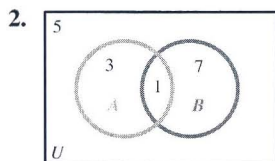
$$45 + 10 + 35 + 20 + 25 + 30 + 30 = 195 \text{ personas.}$$

2.4 EJERCICIOS

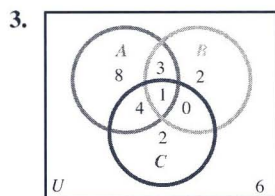
Use los números que representan cardinalidades en los diagramas de Venn para indicar la cardinalidad de cada conjunto especificado.



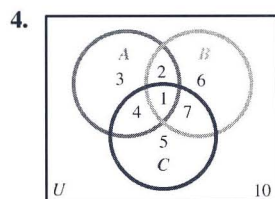
- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$
c) $A \cap B'$ d) $A' \cap B$
e) $A' \cap B'$



- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$
c) $A \cap B'$ d) $A' \cap B$
e) $A' \cap B'$



- a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cap B \cap C'$
c) $A \cap B' \cap C$ d) $A' \cap B \cap C$
e) $A' \cap B' \cap C$ f) $A \cap B' \cap C'$
g) $A' \cap B \cap C'$ h) $A' \cap B' \cap C'$



- a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cap B \cap C'$
c) $A \cap B' \cap C$ d) $A' \cap B \cap C$
e) $A' \cap B' \cap C$ f) $A \cap B' \cap C'$
g) $A' \cap B \cap C'$ h) $A' \cap B' \cap C'$

En los ejercicios 5 a 10, utilice la fórmula adecuada.

5. Obtenga el valor de $n(A \cup B)$ si $n(A) = 12$, $n(B) = 14$, y $n(A \cap B) = 5$.
6. Obtenga el valor de $n(A \cup B)$ si $n(A) = 16$, $n(B) = 28$, y $n(A \cap B) = 5$.
7. Obtenga el valor de $n(A \cap B)$ si $n(A) = 20$, $n(B) = 12$, y $n(A \cup B) = 25$.
8. Obtenga el valor de $n(A \cap B)$ si $n(A) = 20$, $n(B) = 24$, y $n(A \cup B) = 30$.

9. Obtenga el valor de $n(A)$ si $n(B) = 35$, $n(A \cap B) = 15$, y $n(A \cup B) = 55$.

10. Obtenga el valor de $n(B)$ si $n(A) = 20$, $n(A \cap B) = 6$, y $n(A \cup B) = 30$.

Dibuje el diagrama de Venn adecuado y use la información proporcionada para completar el número de elementos en cada región.

11. $n(A) = 19$, $n(B) = 13$, $n(A \cup B) = 25$, $n(A') = 11$

12. $n(U) = 43$, $n(A) = 25$, $n(A \cap B) = 5$, $n(B') = 30$

13. $n(A') = 25$, $n(B) = 28$, $n(A' \cup B') = 40$,
 $n(A \cap B) = 10$

14. $n(A \cup B) = 15$, $n(A \cap B) = 8$, $n(A) = 13$,
 $n(A' \cup B') = 11$

15. $n(A) = 57$, $n(A \cap B) = 35$, $n(A \cup B) = 81$,
 $n(A \cap B \cap C) = 15$, $n(A \cap C) = 21$, $n(B \cap C) = 25$,
 $n(C) = 49$, $n(B') = 52$

16. $n(A) = 24$, $n(B) = 24$, $n(C) = 26$, $n(A \cap B) = 10$,
 $n(B \cap C) = 8$, $n(A \cap C) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 6$,
 $n(U) = 50$

17. $n(A) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 5$, $n(A \cap C) = 13$,
 $n(A \cap B') = 9$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A' \cap B' \cap C') = 21$,
 $n(B \cap C') = 3$, $n(B \cup C) = 32$

18. $n(A \cap B) = 21$, $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 26$,
 $n(B \cap C) = 7$, $n(A \cap C') = 20$, $n(B \cap C') = 25$,
 $n(C) = 40$, $n(A' \cap B' \cap C') = 2$

Use diagramas de Venn para resolver cada problema.

19. **Escritura y producción de música** Joe Long trabajó en nueve proyectos musicales el año pasado.



Joe Long, Bob Gaudio, Tommy DeVito y Frankie Valli
Las cuatro estaciones

Escribió y produjo 3 proyectos.
Escribió un total de 5 proyectos.
Produjo un total de 7 proyectos.

- a) ¿Cuántos proyectos escribió, pero no produjo?
b) ¿Cuántos proyectos produjo, pero no escribió?

20. Colección de discos compactos Gitti Lindner es admirador de la música de Paul Simon y Art Garfunkel. En su colección de 25 discos compactos, tiene los siguientes:

- 5 en los que cantan tanto Simon como Garfunkel
- 7 en los que canta Simon
- 8 en los que canta Garfunkel
- 15 en los que no canta Simon ni Garfunkel.

- a) ¿En cuántos de sus discos aparece solo Paul Simon?
- b) ¿En cuántos de sus discos aparece solo Art Garfunkel?
- c) ¿En cuántos discos aparece al menos uno de estos dos artistas?
- d) ¿En cuántos discos aparece cuando mucho uno de estos dos artistas?

21. Respuesta de admiradores a cantantes Julie Davies, un analista de la cultura pop, quería evaluar el atractivo de diferentes cantantes. Ella entrevistó a 65 admiradores de cantantes y determinó lo siguiente:

- A 37 les gusta Jazmine Sullivan
- A 36 les gusta Carrie Underwood
- A 31 les gusta Brad Paisley
- A 14 les gustan Jazmine y Carrie
- A 21 les gustan Jazmine y Brad
- A 14 les gustan Carrie y Brad
- A 8 les gustan todos los cantantes

¿A cuántos de estos admiradores:

- a) les gustan exactamente dos de estos cantantes?
- b) les gusta exactamente uno de estos cantantes?
- c) no les gusta ninguno de estos cantantes?
- d) les gusta Jazmine, pero no Carrie ni Brad?
- e) les gusta Brad y exactamente uno de los otros dos?

22. Ayuda financiera a estudiantes En la universidad de Louisiana, la mitad de los 48 estudiantes de matemáticas recibieron ayuda financiera federal como sigue:

- 5 tenían financiamiento Pell Grant
- 14 participaban en el College Work Study Program
- 4 tenían becas TOPS
- 2 tenían becas TOPS y participaban en el Work Study.

Aquellos con financiamiento Pell Grant no recibían otro tipo de ayuda federal.

¿Cuántos de los 48 estudiantes de matemáticas:

- a) no tenían ayuda federal?
- b) recibían más de una de estas tres formas de ayuda?
- c) recibían ayuda federal diferente de estas tres formas de ayuda?
- d) tenían una beca TOPS o Work Study?
- e) recibían exactamente una de estas tres formas de ayuda?

23. Hábitos al cocinar Eric Dangerfield entrevistó a 140 personas en un centro comercial suburbano para averiguar algunos de sus hábitos al cocinar. Obtuvo los resultados que se muestran en la siguiente columna.

- 58 usan hornos de microondas
- 63 usan estufas eléctricas
- 58 usan estufas de gas
- 19 usan hornos de microondas y estufas eléctricas
- 17 usan hornos de microondas y estufas de gas
- 4 usan tanto estufas de gas como eléctricas
- 1 usa los tres tipos

- a) ¿Cuántos usan exactamente dos de estas clases de aparatos domésticos?
- b) ¿Cuántos usan al menos dos de estas clases de aparatos domésticos?

24. Creencias religiosas de minorías Se encuestó a 140 adultos estadounidenses.

Sean A = el conjunto de encuestados que creen en la astrología,

R = el conjunto de encuestados que creen en la reencarnación,

Y = el conjunto de encuestados que creen en la espiritualidad del yoga.

La investigación arrojó la siguiente información:

$$n(A) = 35 \qquad n(R \cap Y) = 8$$

$$n(R) = 36 \qquad n(A \cap Y) = 10$$

$$n(Y) = 32 \qquad n(A \cap R \cap Y) = 6$$

$$n(A \cap R) = 19$$

¿Cuántos de los encuestados:

- a) creen en la astrología, pero no en la reencarnación?
- b) creen al menos en una de estas tres corrientes?
- c) creen en la reencarnación, pero en ninguna de las otras?
- d) creen exactamente en dos de estas tres corrientes?
- e) no creen en ninguna de las tres corrientes?

25. Encuesta sobre actitudes hacia la religión Investigadores encuestaron a varias personas y registraron los siguientes datos. De todos los entrevistados:

- 240 piensan que Hollywood es hostil con las religiones
- 160 piensan que los medios son hostiles con la religión
- 181 piensan que los científicos son hostiles con la religión
- 145 piensan que Hollywood y los medios son hostiles con la religión
- 122 piensan que los científicos y los medios son hostiles con la religión
- 80 piensan que exactamente dos de estos grupos son hostiles con la religión
- 110 piensan que los tres grupos son hostiles con la religión
- 219 piensan que ninguno de estos tres grupos es hostil con la religión.

¿Cuántos sujetos:

- a) fueron encuestados?
- b) piensan que exactamente uno de estos tres grupos es hostil con la religión?

26. Metas de los estudiantes Carol Britz, quien vende libros de texto, entrevistó a estudiantes de primer año en el plan-tel de una universidad para averiguar las metas principales de los estudiantes en la actualidad.

Sean W = el conjunto de aquellos que quieren estar sa-ludables,
 F = el conjunto de aquellos que quieren formar una familia,
 E = el conjunto de aquellos que quieren ser exper-tos en sus campos de estudio.

Los descubrimientos de Carol se resumen aquí.

$$\begin{aligned} n(W) &= 160 & n(E \cap F) &= 90 \\ n(F) &= 140 & n(W \cap F \cap E) &= 80 \\ n(E) &= 130 & n(E') &= 95 \\ n(W \cap F) &= 95 & n[(W \cup F \cup E)'] &= 10 \end{aligned}$$

Obtenga el número total de estudiantes entrevistados.

27. Síntomas de pacientes en un hospital Jesse Fisher realizó una investigación entre 75 pacientes de la unidad de cardiología del hospital Santa Fe durante un periodo de dos semanas.

Sean B = el conjunto de pacientes con presión sanguínea alta,
 C = el conjunto de pacientes con niveles altos de co-lesterol,
 S = el conjunto de pacientes que fuman.

Los datos de Jesse son los siguientes:

$$\begin{aligned} n(B) &= 47 & n(B \cap S) &= 33 \\ n(C) &= 46 & n(B \cap C) &= 31 \\ n(S) &= 52 & n(B \cap C \cap S) &= 21 \\ n[(B \cap C) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)] &= 51 \end{aligned}$$

Obtenga el número de estos pacientes que que:

- a) tienen niveles de presión o colesterol altos, pero no ambos
- b) tienen menos de dos de las indicaciones listadas
- c) son fumadores, pero no tienen niveles altos de coleste-rol ni presión alta
- d) no tienen exactamente dos de las indicaciones listadas.

28. Temas de canciones Alguna vez se dijo que las canciones del estilo *country* se refieren a tres temas básicos: amor, cárcel y camiones de carga. Una investigación de la radio local produjo los siguientes datos.

- 12 canciones acerca de conductores de camiones que están enamorados mientras se encuentran en prisión
- 13 acerca de un prisionero enamorado
- 28 acerca de una persona enamorada
- 18 acerca de un conductor de camión enamorado
- 3 acerca de un conductor de camión en prisión que no está enamorado
- 2 acerca de personas en prisión que no están enamo-radas y no conducen camiones
- 8 acerca de personas que están fuera de prisión, que no están enamoradas y no conducen camiones
- 16 acerca de conductores de camiones que no están en prisión

a) ¿Cuántas canciones se analizaron?

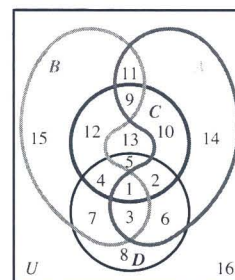
Obtenga el número de canciones acerca de:

- b) conductores de camiones c) prisioneros
- d) conductores de camiones en prisión
- e) personas que no están en prisión
- f) personas que no están enamoradas.



29. Use la siguiente figura para obtener los números de regio-nes que pertenecen a cada conjunto.

- a) $A \cap B \cap C \cap D$
- b) $A \cup B \cup C \cup D$
- c) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
- d) $(A' \cap B') \cap (C \cup D)$



30. Espectadores de deportes Una investigación de 130 televi-dentes dice que:

- 52 ven futbol
- 56 ven basquetbol
- 62 ven tenis
- 60 ven golf
- 21 ven futbol y basquetbol
- 19 ven futbol y tenis
- 22 ven basquetbol y tenis
- 27 ven futbol y golf
- 30 ven basquetbol y golf
- 21 ven tenis y golf
- 3 ven futbol, basquetbol y tenis
- 15 ven futbol, basquetbol y golf
- 10 ven futbol, tenis y golf
- 10 ven basquetbol, tenis y golf
- 3 ven estos cuatro deportes
- 5 no ven ninguno de estos cuatro deportes

Use un diagrama de Venn para contestar cada pregunta.

- a) ¿Cuántos de estos televidentes ven futbol, basquetbol y tenis, pero no golf?
- b) ¿Cuántos ven exactamente uno de estos cuatro deportes?
- c) ¿Cuántos ven exactamente dos de estos cuatro deportes?

Resuelva cada problema.

31. Posiciones en el basquetbol Donna DePaulis tiene un programa de basquetbol en California. En el primer día de la temporada, se presentaron 60 mujeres jóvenes y fueron clasificadas por edad y por su posición preferida, como se muestra en la siguiente tabla.

	Posición			Totales
	Escolta (G)	Alero (F)	Base (N)	
Edad				
Junior (preparatoria) (J)	9	6	4	19
Senior (preparatoria) (S)	12	5	9	26
Universidad (C)	5	8	2	15
Totales	26	19	15	60

Usando los conjuntos de la tabla identificados con letras, obtenga el número de jugadoras en cada uno de los siguientes conjuntos.

- a) $J \cap G$ b) $S \cap N$ c) $N \cup (S \cap F)$
 d) $S' \cap (G \cup N)$ e) $(S \cap N') \cup (C \cap G')$
 f) $N' \cap (S' \cap C')$



32. Alojamiento del ejército Un estudio de las tendencias de alojamiento del ejército estadounidense clasifica al personal como oficiales comisionados (C), oficiales de planta (W) o enlistados (E), y sus instalaciones de vivienda como la base (B), renta fuera de base (R) o propiedad fuera de base (O). Un estudio arrojó los siguientes datos.

		Viviendas			Totales
		B	R	O	
Personal	C	12	29	54	95
	W	4	5	6	15
	E	374	71	285	730
Totales		390	105	345	840

Obtenga la cantidad de personal en cada uno de los siguientes conjuntos.

- a) $W \cap O$ b) $C \cup B$
 c) $R' \cup W'$ d) $(C \cup W) \cap (B \cup R)$
 e) $(C \cap B) \cup (E \cap O)$ f) $B \cap (W \cup R)'$

33. ¿Podría presentarse la información del **ejemplo 4** en un diagrama de Venn similar al de los **ejemplos 1 y 3**? Si es así, construya el diagrama. De lo contrario, explique la diferencia principal del **ejemplo 4**.

34. Explique cómo se puede deducir una fórmula para números cardinales en el caso donde se presentan *tres* conjuntos. Específicamente, proporcione una fórmula que relacione $n(A \cup B \cup C)$ con

$$n(A), n(B), n(C), n(A \cap B), n(A \cap C), n(B \cap C), \text{ y } n(A \cap B \cap C).$$

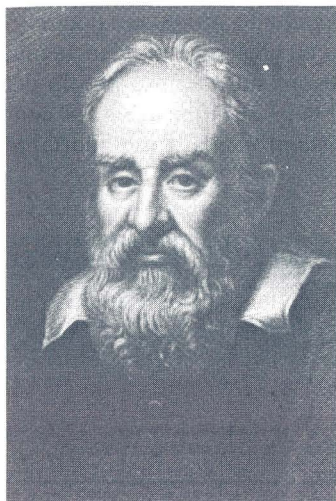
Ilustre con un diagrama de Venn.

EXTENSIÓN Conjuntos infinitos y sus cardinalidades

- Correspondencia uno a uno y conjuntos equivalentes • El número cardinal \aleph_0
- Conjuntos infinitos • Conjuntos que no son numerables

Correspondencia uno a uno y conjuntos equivalentes Georg Cantor, cuyo perfil se presentó en la **página 44**, encontró mucha resistencia a finales del siglo XIX cuando desarrolló la teoría de conjuntos moderna, debido a sus ideas sobre conjuntos infinitos. Sin embargo, los resultados que aquí se discuten se aceptan comúnmente en la actualidad. Recuerde lo siguiente de la **sección 2.1**.

1. El número cardinal de un conjunto es el número de elementos que contiene.
2. Dos conjuntos son *equivalentes* si sus números cardinales son iguales.
3. Un conjunto es *infinito* si sus números cardinales son “demasiado grandes” para ubicarse entre los números enteros no negativos.



En griego, la palabra **paradoja** significaba originalmente "opinión incorrecta", y era lo contrario de ortodoxia, que significaba "opinión correcta". Con el correr de los años, el significado de la palabra cambió a contradicción.

Antes del siglo xx se consideraba una paradoja que cualquier conjunto pudiera colocarse en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo. Esta paradoja, llamada **paradoja de Galileo**, en honor del matemático y científico del siglo xvi, **Galileo** (véase la fotografía), se explica ahora diciendo que la habilidad para hacer tal correspondencia es la manera como distinguimos los conjuntos finitos de los conjuntos infinitos. Lo que es verdad para conjuntos finitos, no necesariamente es verdad para conjuntos infinitos.

Podemos establecer fácilmente la equivalencia de dos conjuntos finitos si contamos sus elementos y comparamos sus números cardinales. Pero los elementos de un conjunto infinito no se pueden contar de la misma manera. Cantor enfrentó esta dificultad usando la idea de **correspondencia uno a uno** (o correspondencia biunívoca) entre conjuntos. Los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$, por ejemplo, se pueden colocar en esta correspondencia de la siguiente manera (entre otras):

$$\begin{array}{ccc} \{1, & 2, & 3\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{3, & 6, & 9\}. \end{array}$$

Esta correspondencia es "uno a uno" porque cada elemento de cada conjunto está aparejado con exactamente un elemento del otro conjunto. La equivalencia entre A y B se denota como $A \sim B$.

Por otro lado, los conjuntos $C = \{1, 8, 12\}$ y $D = \{6, 11\}$ no son equivalentes. Cualquier correspondencia entre ellos, como

$$\begin{array}{ccc} \{1, & 8, & 12\} \\ \downarrow & \searrow & \searrow \\ \{6, & & 11\} \end{array}$$

no es uno a uno. (Se deben aparejar dos elementos diferentes de C con un solo elemento de D).

Cantor amplió la idea de correspondencia uno a uno, que establece la equivalencia, a su estudio de conjuntos infinitos.

El número cardinal \aleph_0 El conjunto infinito más básico de números cardinales es $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Se dice que los números cardinales tienen el número cardinal infinito \aleph_0 (la primera letra del alfabeto hebreo, álef, con un subíndice igual a cero; se lee "álef nulo"). Piense en \aleph_0 como el número cardinal infinito "más pequeño". A la pregunta "¿cuántos números infinitos hay aquí?", respondemos "Hay \aleph_0 de ellos".

Ahora, cualquier conjunto que se pueda colocar en correspondencia uno a uno con los números cardinales tendrá el mismo número cardinal, es decir, \aleph_0 . Existen muchos conjuntos como estos.

EJEMPLO 1 Demostración de que $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tiene el número cardinal \aleph_0

Verifique que el conjunto de números enteros $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ tiene el número cardinal \aleph_0 .

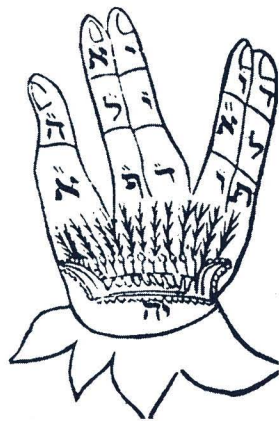
SOLUCIÓN

Sabemos que \aleph_0 es un número cardinal del conjunto de números cardinales (por definición). Para demostrar que otro conjunto, como el de los números enteros no negativos, también tiene a \aleph_0 como su número cardinal, debemos demostrar que el conjunto es equivalente al conjunto de números cardinales. La equivalencia se establece por la correspondencia uno a uno entre dos conjuntos.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots, & n, & \dots\} & \text{Números cardinales} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots, & n-1, & \dots\} & \text{Números enteros no negativos} \end{array}$$

El aparejamiento de los números cardinales n con los números enteros no negativos $n - 1$ continúa indefinidamente, sin que haya un elemento en los dos conjuntos que no se use en el proceso de aparejamiento. Aun cuando el conjunto de números enteros no negativos tiene un elemento adicional (el número 0) comparado con el conjunto de números cardinales, la correspondencia prueba que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal, \aleph_0 . ■■■

El resultado del **ejemplo 1** muestra que la intuición es una guía deficiente para tratar con conjuntos infinitos. Como los conjuntos de números cardinales y números enteros no negativos se pueden colocar en correspondencia uno a uno, los dos conjuntos tienen el mismo número cardinal.



La letra **álef** y otras letras del **alfabeto hebreo** se muestran sobre el diagrama cabalístico que representa una de las diez emanaciones de Dios durante la Creación. La **cábala**, la tradición ultramística dentro del judaísmo, surgió en el siglo v y alcanzó su máxima aceptación en el siglo xvi tanto en Palestina como en Polonia.

Los creyentes en la **cábala** creían que la Biblia ocultaba misterios que podían descubrirse con permutaciones, combinaciones y anagramas de sus propias letras. Cada letra en el alfabeto tiene un valor numérico (**álef** = 1) y, por lo tanto, se forma un sistema de numeración. La letra **Y** es igual a 10, de modo que 15 es igual a **YH** (10 + 5). Sin embargo, **YH** es una forma del Santo Nombre, de modo que, en vez de ello, **TW** (9 + 6) es el símbolo.

Conjuntos infinitos El conjunto $\{5, 6, 7\}$ es un subconjunto propio del conjunto $\{5, 6, 7, 8\}$, y no hay manera de colocar estos dos conjuntos en una correspondencia uno a uno. Sin embargo, el conjunto de números cardinales es un subconjunto propio del conjunto de números enteros no negativos, y el **ejemplo 1** demostró que estos dos conjuntos *se pueden* colocar en correspondencia uno a uno. Esta propiedad tan importante se usa en la definición formal de un conjunto infinito.

Conjunto infinito

Un conjunto es **infinito** si se puede colocar en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo.

EJEMPLO 2 Demostración de que $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ tiene el número cardinal \aleph_0

Compruebe que el conjunto de números enteros $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ tiene el número cardinal \aleph_0 .

SOLUCIÓN

Se puede establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números enteros y el conjunto de números cardinales.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots, & 2n, & 2n+1, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \dots, & n, & -n, & \dots \end{array}$$

Debido a esta correspondencia uno a uno, el número cardinal de este conjunto de números enteros es el mismo que el número cardinal del conjunto de números cardinales, \aleph_0 .

La correspondencia uno a uno del **ejemplo 2** prueba que el conjunto de números enteros es infinito: se colocó en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo.

Como se muestra en el **ejemplo 2**, hay exactamente tantos números enteros como números cardinales. Este resultado no es intuitivo en absoluto, y el siguiente resultado lo es incluso menos. Existe un número infinito de fracciones entre dos números cardinales cualesquiera. Por ejemplo, hay un conjunto infinito de fracciones $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots\right\}$ entre los números cardinales 0 y 1. Esto implicaría que existen “más” fracciones que números cardinales. Sin embargo, solo existen tantas fracciones como números cardinales.

EJEMPLO 3 Demostración de que el conjunto de números racionales tiene el número cardinal \aleph_0

Compruebe que el número cardinal del conjunto de números racionales es \aleph_0 .

SOLUCIÓN

Primero demostraremos que se puede establecer la correspondencia uno a uno entre el conjunto de números racionales no negativos y los números cardinales. Esto se logra con el ingenioso esquema que se presenta a continuación, ideado por Georg Cantor.

Observe la **figura 22** de la siguiente página. Los números racionales no negativos cuyos denominadores son iguales a 1 se encuentran en la primera fila. Aquellos cuyos denominadores son 2, se encuentran en la segunda fila, y así sucesivamente. Cada número racional no negativo aparece en esta lista más tarde o más temprano. Por ejemplo, $\frac{327}{189}$ se encuentra en la fila 189 y en la columna 327.

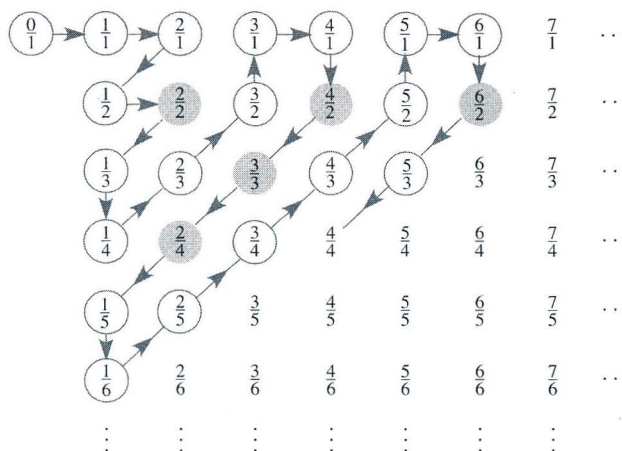


Figura 22

Para establecer la correspondencia uno a uno entre el conjunto de racionales no negativos y el conjunto de números cardinales, se sigue la trayectoria dibujada en la **figura 22**. Hagamos que $\frac{0}{1}$ corresponda al 1, que $\frac{1}{1}$ corresponda al 2, $\frac{2}{1}$ al 3, $\frac{1}{2}$ al 4, (nos saltamos $\frac{2}{2}$, puesto que $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$), $\frac{1}{3}$ al 5, $\frac{1}{4}$ al 6, y así sucesivamente. Los números de los círculos sombreados se omiten porque se pueden reducir a términos menores que ya se incluyeron anteriormente en la lista.

Este procedimiento establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de racionales no negativos y los números cardinales, lo que demuestra que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal, \aleph_0 . Ahora, usando el método del **ejemplo 2** (por ejemplo, haciendo que cada número negativo siga a su correspondiente número positivo), podemos ampliar esta correspondencia para incluir también los números racionales negativos. Por lo tanto, el conjunto de todos los números racionales tiene el número cardinal \aleph_0 . ■■■

Un conjunto es **numerable** si es finito o si tiene el número cardinal \aleph_0 . Todos los conjuntos infinitos de números analizados hasta ahora (los números cardinales, los números enteros no negativos, los números enteros y los números racionales) son numerables.



La paradoja del barbero es una versión de la paradoja de la teoría de conjuntos que Bertrand Russell propuso a principios del siglo xx.

1. Los hombres de un pueblo son de dos tipos: hombres que no se rasuran a sí mismos y hombres que sí lo hacen.
2. El barbero del pueblo rasura a todos los hombres que no se rasuran ellos mismos y solo rasura a esos hombres.

¿Pero quién rasura al barbero?

El barbero no se puede rasurar él mismo. Si lo hiciera, caería en la categoría de los hombres que se rasuran a sí mismos. Sin embargo, el inciso 2) de arriba establece que el barbero no rasura a estos hombres.

Entonces, el barbero no se rasura él mismo. Pero entonces cae en la categoría de los hombres que no se rasuran a sí mismos. De acuerdo con el inciso 2), el barbero rasura a todos estos hombres; por lo tanto, el barbero también se rasura a sí mismo.

Vemos que el barbero no puede rasurarse a sí mismo; sin embargo, sí se rasura a sí mismo. He ahí la paradoja.

Conjuntos que no son numerables

EJEMPLO 4

Demostración de que el conjunto de números reales no tiene el número cardinal \aleph_0

Compruebe que el conjunto de todos los números reales no tiene el número cardinal \aleph_0 .

SOLUCIÓN

Existen dos posibilidades:

1. El conjunto de números reales tiene el número cardinal \aleph_0 .
2. El conjunto de números reales no tiene el número cardinal \aleph_0 .

Si suponemos que el primer enunciado es verdadero, entonces se puede establecer la correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y el conjunto de números cardinales.

En un capítulo posterior, demostraremos que cada número real se puede escribir como un número decimal (o simplemente “decimal”). Por lo tanto, en la correspondencia uno a uno que estamos suponiendo, algún decimal corresponde al número cardinal 1, algún decimal corresponde al 2, y así sucesivamente. Suponga que la correspondencia inicia como sigue:

- 1 \leftrightarrow 0.68458429006 ...
 - 2 \leftrightarrow 0.13479201038 ...
 - 3 \leftrightarrow 0.37291568341 ...
 - 4 \leftrightarrow 0.935223671611 ...
- y así sucesivamente.



La **paradoja de Zenón** de la tortuga y Aquiles fue presentada en su forma original por Zenón de Elea.

En la historia original, la tortuga pudo convencer a Aquiles (el héroe griego de *La Iliada* de Homero) de que en una carrera, considerando una pequeña ventaja, la tortuga siempre podrá derrotar a Aquiles. (Véase el

inicio del capítulo y los ejercicios 51 y 52 de esta **Extensión**). La solución de esta paradoja se analiza en el sitio Web www.mathacademy.com.

Suponer la existencia de la correspondencia uno a uno entre los números cardinales y los números reales significa que todos los decimales se encuentran en la lista anterior. Construyamos un nuevo decimal K como sigue. El primer decimal en la lista anterior tiene al 6 como primer dígito. Hagamos que K inicie como $K = 0.4\dots$ Seleccionamos 4 porque $4 \neq 6$. (Podimos haber elegido cualquier otro dígito menos 6). Como el segundo dígito del segundo decimal en la lista es igual a 3, hagamos a $K = 0.45\dots$ (porque $5 \neq 3$). El tercer dígito del tercer decimal es 2, entonces hagamos a $K = 0.457\dots$ (porque $7 \neq 2$). El cuarto dígito del cuarto decimal es 2, entonces hagamos a $K = 0.4573\dots$ (porque $3 \neq 2$). Se continúa definiendo K de esta manera.

¿Está K en la lista que supusimos que tiene todos los decimales? El primer decimal de la lista difiere de K al menos en la primera posición. (K inicia con 4, y el primer decimal en la lista inicia con 6). El segundo decimal en la lista difiere de K en al menos la segunda posición, y el n -ésimo decimal en la lista difiere de K en al menos una posición, de modo que K podría no estar en la lista. En resumen:

Supusimos que todos los decimales están en la lista anterior.

El decimal K no está en la lista.

Como estos enunciados no pueden ser ambos verdaderos, el supuesto original nos lleva a una contradicción. Esto obliga a la aceptación de la única alternativa posible con el supuesto original: no es posible establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y el conjunto de números cardinales. El número cardinal del conjunto de reales no es igual a \aleph_0 . ■■■

El conjunto de números cardinales es un subconjunto propio del conjunto de números reales. Debido a esto, parecería razonable decir que el número cardinal del conjunto de números reales, identificado comúnmente como c , es mayor que \aleph_0 . (La letra c aquí representa un *continuo*). Se pueden construir otros números cardinales infinitos, inclusive más grandes. Por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de números reales tiene un número cardinal más grande que c . Continuando este proceso de obtención de los números cardinales de conjuntos de subconjuntos, cada vez se producen números cardinales infinitos más y más grandes.

Los seis conjuntos infinitos más importantes de números se listaron en la **sección 2.1**. Todos ellos se han tratado en esta **Extensión**, excepto los números irracionales. Los números irracionales tienen representaciones decimales, de modo que todos están incluidos entre los números reales. Como los números irracionales son un subconjunto de los números reales, usted podría suponer que los números irracionales tienen el número cardinal \aleph_0 , exactamente como los racionales. Sin embargo, como la unión de los racionales y los irracionales es igual a todos los reales, eso implicaría que la cardinalidad de la unión de dos conjuntos numerables disjuntos es c . Pero el **ejemplo 2** mostró que este no es el caso. Una percepción más razonable es que el número cardinal de los irracionales es c (el mismo que el de los reales). Esto, de hecho, es verdad.

Números cardinales de conjuntos de números infinitos

Conjunto infinito	Número cardinal
Números naturales o cardinales	\aleph_0
Números enteros no negativos	\aleph_0
Números enteros	\aleph_0
Números racionales	\aleph_0
Números irracionales	c
Números reales	c

EJERCICIOS DE LA EXTENSIÓN

Asocie cada conjunto de la columna I con el conjunto de la columna II que tiene la misma cardinalidad. Indique cuál es el número cardinal.

- | I | II |
|---|--|
| 1. $\{6\}$ | A. $\{x x \text{ es un número racional}\}$ |
| 2. $\{-16, 14, 3\}$ | B. $\{26\}$ |
| 3. $\{x x \text{ es un número natural}\}$ | C. $\{x x \text{ es un número irracional}\}$ |
| 4. $\{x x \text{ es un número real}\}$ | D. $\{x, y, z\}$ |
| 5. $\{x x \text{ es un número entero entre 5 y 6}\}$ | E. $\{x x \text{ es un número real que satisface } x^2 = 25\}$ |
| 6. $\{x x \text{ es un número entero que satisface } x^2 = 100\}$ | F. $\{x x \text{ es un número entero par e impar a la vez}\}$ |

Coloque cada par de conjuntos en correspondencia uno a uno, si es posible.

7. $\{I, II, III\}$ y $\{x, y, z\}$
8. $\{a, b, c, d\}$ y $\{2, 4, 6\}$
9. $\{a, d, d, i, t, i, o, n\}$ y $\{a, n, s, w, e, r\}$
10. $\{\text{Obama, Clinton, Bush}\}$ y $\{\text{Michelle, Hillary, Laura}\}$

Indique el número cardinal de cada conjunto.

11. $\{a, b, c, d, \dots, k\}$
12. $\{9, 12, 15, \dots, 36\}$
13. \emptyset
14. $\{0\}$
15. $\{300, 400, 500, \dots\}$
16. $\{-35, -28, -21, \dots, 56\}$
17. $\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, \dots\right\}$
18. $\{x|x \text{ es un número entero par}\}$
19. $\{x|x \text{ es un número cardinal impar}\}$
20. $\{b, a, 1, 1, a, d\}$
21. $\{\text{ene, feb, mar, } \dots, \text{dic}\}$
22. $\{\text{Alabama, Alaska, Arizona, } \dots, \text{Wisconsin, Wyoming}\}$
23. Lew Lefton analizó la antigua canción *100 botellas de cerveza en la pared* para ilustrar una propiedad de los números cardinales infinitos.

Llene los espacios del primer verso de la composición de Lefton:

\aleph_0 botellas de cerveza en la pared, \aleph_0 botellas de cerveza, toma una y pásala alrededor, _____ botellas de cerveza en la pared.

(Fuente: <http://people.math.gatech.edu/~llefton>).



24. Dos correspondencias uno a uno se consideran “diferentes” si algunos elementos se aparejan en una de manera diferente que en otra.

	$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	
	\downarrow	\downarrow	\downarrow
	$\{a, b, c\}$	$\{c, b, a\}$	son diferentes,
	\downarrow	\downarrow	\downarrow
	$\{a, b, c\}$	$\{b, c, a\}$	
mientras que	\downarrow	\downarrow	\downarrow
	$\{c, a, b\}$	$\{a, b, c\}$	no lo son.

- a) ¿Cuántas correspondencias *diferentes* se pueden establecer entre los conjuntos $\{\text{Jamie Foxx, Mike Myers, Madonna}\}$ y $\{\text{Austin Powers, Ray Charles, Eva Perón}\}$?
- b) ¿Cuál de estas correspondencias apareja cada persona con el famoso papel de cine apropiado?

Determine si cada par de conjuntos es igual, equivalente, ambas cosas, o ninguna.

25. $\{u, v, w\}, \{v, u, w\}$
26. $\{48, 6\}, \{4, 86\}$
27. $\{X, Y, Z\}, \{x, y, z\}$
28. $\{\text{los}\}, \{\text{sol}\}$
29. $\{x|x \text{ es un número real positivo}\}$
 $\{x|x \text{ es un número real negativo}\}$
30. $\{x|x \text{ es un número racional positivo}\}$
 $\{x|x \text{ es un número real negativo}\}$

Demuestre que cada conjunto tiene el número cardinal \aleph_0 estableciendo una correspondencia uno a uno entre el conjunto dado y el conjunto de números cardinales.

31. El conjunto de números enteros pares positivos.
32. $\{-10, -20, -30, -40, \dots\}$

33. $\{1,000,000, 2,000,000, 3,000,000, \dots\}$

34. El conjunto de números enteros impares.

35. $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

(Sugerencia: Considere que $4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$, y así sucesivamente.)

36. $\{-17, -22, -27, -32, \dots\}$

En los ejercicios 37 a 40, identifique el enunciado proporcionado como siempre verdadero o no siempre verdadero. Si no siempre es verdadero, dé un contraejemplo.

37. Si A y B son conjuntos infinitos, entonces A es equivalente a B .

38. Si el conjunto A es un conjunto infinito y el conjunto B se puede poner en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de A , entonces B debe ser infinito.

39. Si A es un conjunto infinito y no es equivalente al conjunto de números cardinales, entonces $n(A) = c$.

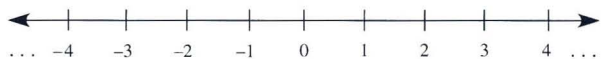
40. Si A y B son conjuntos infinitos numerables, entonces $n(A \cup B) = \aleph_0$.

Los ejercicios 41 y 42 son aplicaciones geométricas del concepto de infinito.

41. El conjunto de números reales se puede representar por una línea infinita, que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. Cada punto sobre la línea corresponde a un número real único, y cada número real corresponde a un punto único sobre esa línea.

a) Use la siguiente figura, donde la línea recta entre 0 y 1 se ha curvado en un semicírculo y posicionado arriba de la línea, para demostrar que

$\{x | x \text{ es un número real entre 0 y 1}\}$
es equivalente a $\{x | x \text{ es un número real}\}$.



b) ¿Qué hecho establece el inciso a) acerca del conjunto de números reales?

42. Demuestre que las dos rectas verticales mostradas aquí tienen el mismo número de puntos.



Demuestre que cada conjunto se puede colocar en correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de sí mismo para probar que el conjunto es infinito.

43. $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$

44. $\{4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$

45. $\left\{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{12}, \frac{3}{16}, \dots\right\}$

46. $\left\{1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \dots\right\}$

47. $\left\{\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{1}{27}, \frac{1}{36}, \dots\right\}$

48. $\{-3, -5, -9, -17, \dots\}$

49. Describa la diferencia entre conjuntos iguales y conjuntos equivalentes.

50. Explique cómo la correspondencia sugerida en el ejemplo 4 demuestra que el conjunto de números reales entre 0 y 1 no es numerable.

La paradoja de Zenón En el inicio del capítulo se comentó la escena de la película *I.Q.*, que trata de la paradoja de Zenón. Zenón nació aproximadamente en el 496 a. C. en el sur de Italia. A continuación se presentan dos formas de su paradoja. ¿Cuál es su explicación para los dos ejemplos siguientes de la paradoja de Zenón?

51. Si Aquiles sale detrás de la tortuga, nunca puede rebasarla, inclusive si corre más rápido.

Suponga que la tortuga tiene un metro de ventaja y va a un décimo de la velocidad de Aquiles. Cuando Aquiles llega al punto donde inició la tortuga, la tortuga está un décimo de metro adelante. Cuando Aquiles llega a ese punto, la tortuga está a un centésimo de metro adelante. Y así sucesivamente. Aquiles cada vez está más cerca, pero nunca puede alcanzarla.

52. El movimiento en sí mismo no existe.

Usted no puede recorrer un metro antes de recorrer medio metro. Pero tampoco puede recorrer medio metro antes de recorrer un cuarto de metro. Y así sucesivamente. Inclusive el movimiento más pequeño no puede existir porque primero tendría que ocurrir un movimiento aún menor.

INVESTIGACIÓN COLABORATIVA

Determinación de los alumnos de su clase

Esta actividad en grupo se diseñó para determinar el número de estudiantes presentes en su clase sin contarlos uno por uno. Esto se lleva a cabo conociendo un conjunto particular al que pertenece cada miembro de la clase, y luego calculando la suma del número cardinal de cada subconjunto.

Para esta actividad, designamos tres conjuntos: X , Y y Z .

$X = \{\text{estudiantes de la clase registrados en el Partido Republicano}\}$

$Y = \{\text{estudiantes de la clase de 24 años de edad o menos}\}$

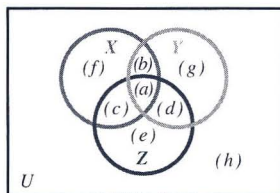
$Z = \{\text{estudiantes que nunca se han casado}\}$

Cada estudiante de la clase pertenece a uno de los conjuntos X , X' , a uno de los conjuntos Y , Y' , y a uno de los conjuntos Z , Z' . [El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos del universo (en este caso, de la clase) que no pertenecen al conjunto].

Como ejemplo, suponga que un estudiante tiene 23 años y es un demócrata divorciado. El estudiante pertenece a los conjuntos X' , Y y Z' . El conjunto al que pertenece el estudiante es

$$X' \cap Y \cap Z'.$$

En el siguiente diagrama de Venn, los ocho subconjuntos se identifican con las letras (a) a (h).



La columna final de la siguiente tabla se completará cuando se termine la investigación. Ahora cada estudiante debe determinar a qué conjunto pertenece. [El estudiante descrito anteriormente pertenece al (g)].

Región	Descripción en términos de notación de conjuntos (comprensión)	Número de alumnos en el conjunto
(a)	$X \cap Y \cap Z$	
(b)	$X \cap Y \cap Z'$	
(c)	$X \cap Y' \cap Z$	
(d)	$X' \cap Y \cap Z$	
(e)	$X' \cap Y' \cap Z$	
(f)	$X \cap Y' \cap Z'$	
(g)	$X' \cap Y \cap Z'$	
(h)	$X' \cap Y' \cap Z'$	

Ahora el profesor entrevistará a los alumnos para ver cuántos miembros hay en cada conjunto. *Recuerde que cada miembro de la clase pertenece a un conjunto y solo a uno.*

Después de que se ha hecho la encuesta, se obtiene la suma de los números en la columna final. La suma debe ser *exactamente* igual al número de estudiantes presentes. Para comprobar el resultado cuente individualmente a todos los miembros de la clase.

Temas de análisis

- Suponga que las entradas de la columna final no suman el número total de alumnos de la clase. ¿Qué podría haber llevado al error?
- ¿Por qué un alumno no puede ser miembro de más de uno de los ocho subconjuntos listados?

EXAMEN DEL CAPÍTULO 2

En los ejercicios 1 a 14, sean

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \quad A = \{a, b, c, d\},$$

$$B = \{b, e, a, d\} \quad \text{y} \quad C = \{a, e\}.$$

Obtenga cada conjunto.

- $A \cup C$
- $B \cap A$
- B'
- $A - (B \cap C')$

Identifique cada enunciado como verdadero o falso.

- $b \in A$
- $C \subseteq A$
- $B \subset (A \cup C)$
- $c \notin C$
- $n[(A \cup B) - C] = 4$
- $\emptyset \subset C$
- $A \cap B'$ es equivalente a $B \cap A'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Obtenga lo siguiente.

13. $n(A \times C)$

14. El número de subconjuntos propios de A .

Describa con palabras cada conjunto.

15. $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

16. $\{\text{enero, febrero, marzo, ..., diciembre}\}$

Expresé cada conjunto en notación de comprensión.

17. $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

18. $\{24, 32, 40, 48, \dots, 88\}$

En cada espacio coloque \subset , \supset , ambos o ningún símbolo para que el enunciado sea verdadero.

19. \emptyset ____ $\{x|x \text{ es un número cardinal entre } 20 \text{ y } 21\}$

20. $\{4, 9, 16\}$ ____ $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Sombree cada conjunto en el diagrama de Venn apropiado.

21. $X \cup Y'$

22. $X' \cap Y'$

23. $(X \cup Y) - Z$

24. $[(X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (X \cap Z)] - (X \cap Y \cap Z)$

Hechos relacionados con inventos La tabla lista 10 inventos, junto con otros datos pertinentes.

Invento	Fecha	Inventor	País
Máquina sumadora	1642	Pascal	Francia
Barómetro	1643	Torricelli	Italia
Rasuradora eléctrica	1917	Schick	Estados Unidos
Fibra óptica	1955	Kapany	Inglaterra
Contador Geiger	1913	Geiger	Alemania
Reloj de péndulo	1657	Huygens	Holanda
Radar	1940	Watson-Watt	Escocia
Telégrafo	1837	Morse	Estados Unidos
Termómetro	1593	Galileo	Italia
Cremallera	1891	Judson	Estados Unidos

Sean $U =$ el conjunto de los 10 inventos,

$A =$ el conjunto de artículos inventados en Estados Unidos,

y $T =$ el conjunto de artículos inventados en el siglo xx.

Liste los elementos de cada conjunto.

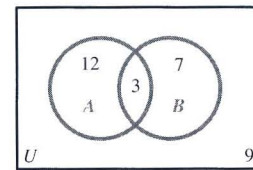
25. $A \cap T$

26. $(A \cup T)'$

27. $A - T'$

28. Defina las leyes de De Morgan con palabras en vez de símbolos.

29. Los números en el diagrama de Venn indican el número de elementos en cada subconjunto particular.



Determine el número de elementos en cada conjunto.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B'$

c) $(A \cap B)'$

30. **Ayuda financiera a estudiantes universitarios** Las tres fuentes principales de ayuda financiera para los estudiantes son los subsidios gubernamentales, las becas privadas y las universidades mismas. Susan Brilling, directora de Apoyo Financiero de una pequeña universidad privada del sur, revisó los registros de 100 estudiantes de segundo año y encontró lo siguiente:

49 reciben subsidios gubernamentales

55 reciben becas privadas

43 reciben apoyo de la universidad

23 reciben subsidios gubernamentales y becas privadas
18 reciben subsidios gubernamentales y apoyo de la universidad

28 reciben becas privadas y apoyo de la universidad

8 reciben ayuda de las tres fuentes.

¿Cuántos estudiantes:

a) reciben solo subsidios gubernamentales?

b) tienen becas privadas, pero no reciben subsidios gubernamentales?

c) reciben ayuda financiera de una sola de estas fuentes?

d) reciben ayuda de exactamente dos de estas fuentes?

e) no reciben ayuda financiera de ninguna de estas fuentes?

f) no reciben ayuda de la universidad ni del gobierno?